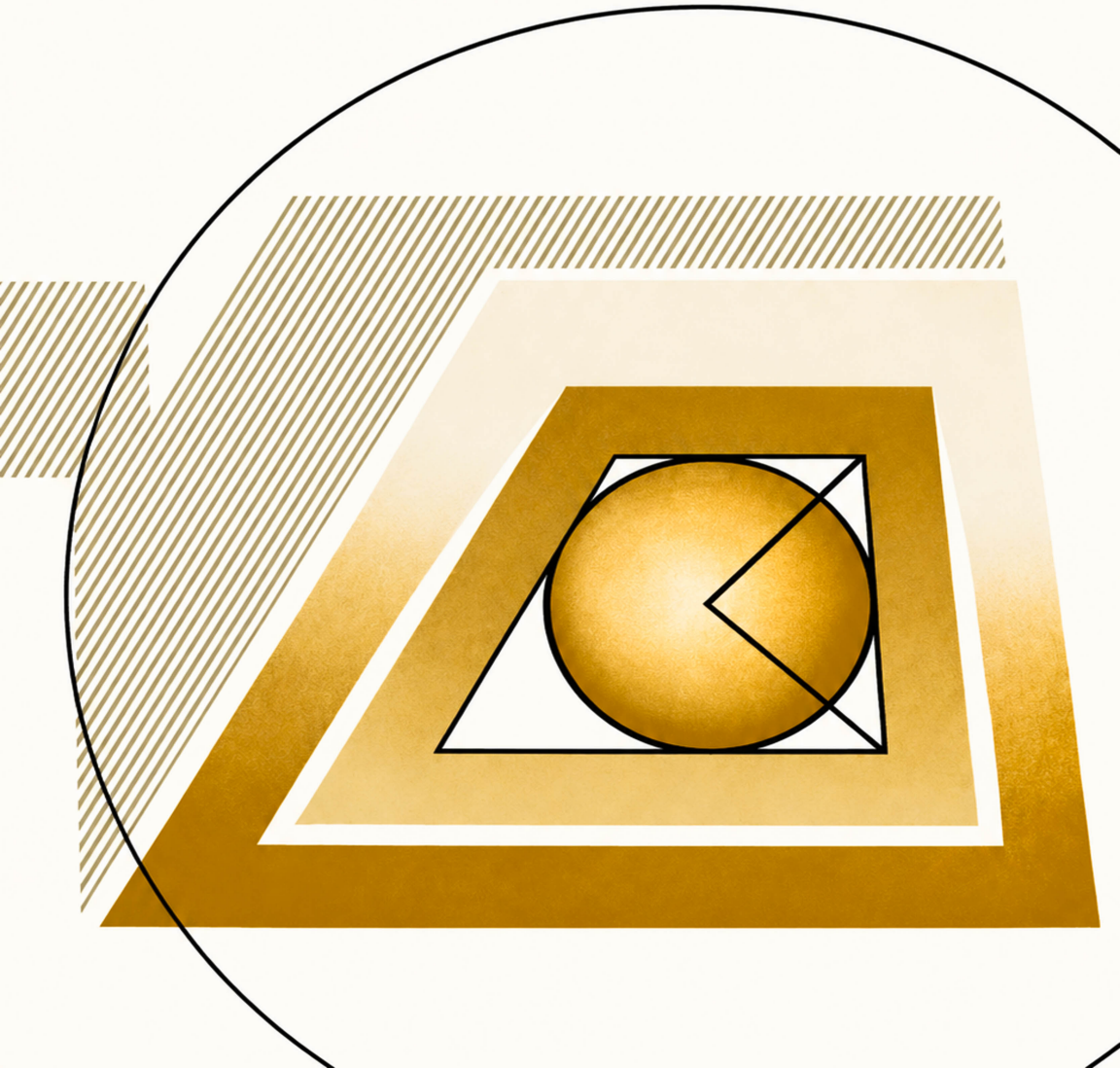
*В. М. АЛЕКСЕЕВ*

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

## *Решение задач*



В. М. АЛЕКСЕЕВ

# ЭЛЕМЕНТАРНАЯ МАТЕМАТИКА

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

КИЕВ
ГОЛОВНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИЗДАТЕЛЬСКОГО ОБЪЕДИНЕНИЯ
«ВИЩА ШКОЛА»
1984

22.10
А47

УДК 51 (031)

**Элементарная математика. Решение задач.** Алексеев В. М.—Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1984 — 351 с.

Справочное пособие содержит около 1700 примеров и задач по всему курсу элементарной математики, систематизированных по методам решения. Приведены образцы решений примеров и задач всех типов. Дано достаточное количество материала для самостоятельной работы. Помещены ответы ко всем примерам и задачам, а также указания и решения к наиболее сложным из них. Учтены особенности школьной программы.

Предназначено для преподавателей математики. Им могут пользоваться те, кто готовится к вступительным экзаменам в технические вузы, учащиеся средних школ и слушатели подготовительных отделений вузов.

Ил. 106. Библиогр.: 7 назв.

Рецензенты: *Н. В. Карташов*, канд. физ.-мат. наук, ассистент (Киевский университет); *М. С. Собко*, преподаватель (Дрогобычский пединститут); *В. П. Иржавцева*, учительница (Донецкая средняя школа № 1)

Редакция литературы по математике и физике
Зав. редакцией *Е. Л. Корженевич*

А $\frac{1702010000-124}{М211(04)-84}$ 96—82

© Издательское объединение «Вища школа», 1983

## ОГЛАВЛЕНИЕ


Предисловие . . . . . 3

Глава I. Алгебраические преобразования . . . . . 5

§ 1. Группировка слагаемых и разложение на множители . . . . 6
§ 2. Приведение радикалов к одному показателю . . . . . 10
§ 3. Выделение полного квадрата под радикалом . . . . . 18
§ 4. Примеры с модулями . . . . . 20
§ 5. Применение различных методов . . . . . 22

Глава II. Алгебраические уравнения . . . . . 26

§ 1. Уравнения высших степеней . . . . . 27
§ 2. Способ замены . . . . . 29
§ 3. Иррациональные уравнения . . . . . 36
§ 4. Уравнения с модулями . . . . . 41

Глава III. Прогрессии и последовательности . . . . . 43

Глава IV. Показательные и логарифмические уравнения . . . 48

§ 1. Основные формулы и определения . . . . . 48
§ 2. Общие свойства логарифмов . . . . . 48
§ 3. Приведение к одному основанию . . . . . 50
§ 4. Способ замены . . . . . 54
§ 5. Группировка и логарифмирование . . . . . 58
§ 6. Однородные уравнения . . . . . 60
§ 7. Применение различных методов . . . . . 61

Глава V. Системы уравнений . . . . . 63

§ 1. Простейшие системы . . . . . 63
§ 2. Замена переменных . . . . . 64
§ 3. Применение однородных уравнений . . . . . 68
§ 4. Системы, симметричные относительно неизвестных . . . . . 70
§ 5. Несимметричные системы . . . . . 72
§ 6. Системы показательных и логарифмических уравнений . . 73
§ 7. Системы с тремя неизвестными . . . . . 78

Глава VI. Неравенства . . . . . 82

§ 1. Метод интервалов . . . . . 83
§ 2. Системы неравенств . . . . . 86
§ 3. Доказательство неравенств . . . . . 90
§ 4. Показательные и логарифмические неравенства . . . . . 92
§ 5. Применение различных методов . . . . . 95

**Глава VII. Тождественные преобразования тригонометрических функций** . . . . . 99
§ 1. Основные формулы . . . . . 99
§ 2. Доказательство тождеств . . . . . 102
§ 3. Упрощения тригонометрических выражений . . . . . 113
§ 4. Преобразования с обратными тригонометрическими функциями . . . . . 117

**Глава VIII. Тригонометрические уравнения** . . . . . 120
§ 1. Простейшие уравнения . . . . . 120
§ 2. Приведение к простейшим уравнениям . . . . . 122
§ 3. Однородные уравнения . . . . . 125
§ 4. Способ замены . . . . . 129
§ 5. Приведение к системам . . . . . 135
§ 6. Уравнения с обратными тригонометрическими функциями 138
§ 7. Примеры повышенной трудности . . . . . 141

**Глава IX. Тригонометрические системы и неравенства** . . . . 145
§ 1. Решение простейших систем . . . . . 145
§ 2. Приведение к простейшим системам . . . . . 146
§ 3. Решение простейших неравенств . . . . . 148
§ 4. Приведение к простейшим неравенствам . . . . . 150

**Глава X. Примеры повышенной трудности** . . . . . 154
§ 1. Уравнения и системы . . . . . 154
§ 2. Уравнения, содержащие логарифмическую и тригонометрические функции . . . . . 158
§ 3. Неравенства . . . . . 161
§ 4. Примеры с параметрами . . . . . 165

**Глава XI. Пределы** . . . . . 169
§ 1. Основные формулы . . . . . 169
§ 2. Вычисление пределов . . . . . 170

**Глава XII. Производная и ее применение** . . . . . 177
§ 1. Основные формулы и определения . . . . . 177
§ 2. Решение примеров и задач . . . . . 178

**Глава XIII. Элементы комбинаторики** . . . . . 186
§ 1. Основные определения и формулы . . . . . 186
§ 2. Решение задач . . . . . 187

**Глава XIV. Первообразная и интеграл** . . . . . 191
§ 1. Основные формулы . . . . . 191
§ 2. Решение задач . . . . . 192

**Глава XV. Разные задачи** . . . . . 198
§ 1. Комплексные числа . . . . . 198
§ 2. Задачи на составление уравнений . . . . . 201

**Глава XVI. Планиметрия** . . . . . 208
§ 1. Основные формулы и определения . . . . . 208

§ 2. Решение задач . . . . . 212
§ 3. Задачи на построение и доказательство . . . . . 225

Глава XVII. Стереометрия . . . . . 230

§ 1. Основные определения и формулы . . . . . 230
§ 2. Задачи на вычисление . . . . . 234
§ 3. Тела вращения . . . . . 256
§ 4. Сечения геометрических тел . . . . . 259
§ 5. Нахождение неизвестных углов . . . . . 264
§ 6. Комбинации геометрических тел . . . . . 270
§ 7. Операции над векторами . . . . . 284

Глава XVIII. Варианты для письменного экзамена по математике . . . . . 289

Ответы, указания и решения . . . . . 314

Список рекомендованной литературы . . . . . 348

## ПРЕДИСЛОВИЕ

XXVI съезд КПСС поставил перед высшей школой задачу подготовить в одиннадцатой пятилетке примерно 10 миллионов специалистов с высшим и средним специальным образованием, всемерно способствовать улучшению качества подготовки специалистов, а также использованию их в народном хозяйстве.

Уровень подготовки специалистов в значительной степени зависит от конкурсного отбора абитурнентов в технические вузы. В связи с повышением требований, предъявляемых к поступающим в вузы, в частности в технические, абитуриент должен владеть знанием современных методов и приемов решения примеров и задач различной трудности по всему курсу элементарной математики.

Настоящим пособием автор делает попытку помочь тем, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам в вузы. Для этого подобраны наиболее характерные примеры и задачи, иллюстрирующие тот или иной метод решения.

Для успешного овладения материалом пособия приведем несколько советов абитуриенту. В первую очередь, необходимо повторить основные формулы и определения, содержащиеся в начале каждой главы, и только после этого можно приступать к детальной проработке нескольких наиболее характерных примеров (образцов), объединенных одним методом решения. Затем для закрепления рекомендуется самостоятельно решить ряд примеров, относящихся к данному типу. К этим примерам в конце пособия приведены ответы, а к более сложным — указания или развернутые решения.

Пособие состоит из 17 глав, которые охватывают все разделы программы по математике для поступающих в технические вузы, в том числе основы математического анализа (пределы, производные, первообразные), элементы

комбинаторики, а также применение векторов в геометрии. В каждой главе задачи расположены по степени возрастания сложности. Это поможет поступающим ознакомиться с различными приемами решения задач и примеров. Помимо этого, для тренировки в умении решать задачи приведено 52 варианта для письменного экзамена по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в некоторые технические вузы.

В пособии применены общепринятые в настоящее время обозначения. При составлении пособия учтены особенности школьной программы.

Часть примеров и задач взята из „Сборника конкурсных задач по математике для поступающих во втузы" под редакцией М. И. Сканави, М., „Высшая школа", 1978. В этих случаях в скобках проставлен номер, под которым данный пример или задача приводятся в „Сборнике".

Отзывы и пожелания просим направлять по адресу: 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7, Головное издательство издательского объединения «Вища школа», редакция литературы по математике и физике.

ГЛАВА I

# АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

## Основные формулы и определения

Если $a>0$, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad (1) \qquad a^m : a^n = a^{m-n}, \quad (2)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}, \quad (3) \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}},\ n \neq 0 \quad (4)$$

$$a^0 = 1, \quad (5) \qquad a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n,\ n \neq 0. \quad (6)$$

Если $a>0$, $b>0$, то при любом $n \in N$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad (7) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}. \quad (8)$$

Если $a<0$, $b<0$, то при $n=2k$, $k \in N$,

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}, \quad (9) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{|a|}}{\sqrt[n]{|b|}}. \quad (10)$$

Здесь $|a|$ — абсолютная величина (модуль) действительного числа $a$ определяется так:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases} \quad (11)$$

При нечетных $n$ ($n=2k+1$) и при любых $a$ и $b$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}, \quad (12) \qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ b \neq 0. \quad (13)$$

Если $n$ и $m$ — целые числа ($n \neq 0$), то

$$\sqrt[2n]{a^{2m}} = \sqrt[n]{|a|^m}. \quad (14)$$

*Формулы сокращенного умножения:*

$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ — квадрат суммы или разности, (15)

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ — разность квадратов (16)

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ — куб суммы, (17)

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ — сумма кубов, (18)

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ — куб разности, (19)

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ — разность кубов. (20)

*Формулы Виета (разложение на множители):*

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (21)$$

где $x_1$, $x_2$ — корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \quad (22)$$

где $x_1$, $x_2$, $x_3$ — корни уравнения $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

*Областью определения D алгебраического выражения называем множество всех наборов числовых значений букв, входящих в это выражение, при которых оно принимает действительные и конечные значения.*

В процессе преобразования алгебраических выражений переходим от одного алгебраического выражения к другому, более простому или удобному. Такой переход производим с помощью тождественных преобразований.

Приведем основные способы преобразования и упрощения алгебраических выражений.

## § 1. Группировка слагаемых и разложение на множители

Отметим, что при упрощении алгебраических выражений наиболее распространенными способами являются: вынесение общего множителя за скобки, разложение на множители.

Область определения алгебраического выражения будем находить в процессе его упрощения. В некоторых простых примерах будем указывать область определения до решения примера.

1. (2. 019)* Упростить

$$A = \frac{(x^3 - y^3)\left(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}\right)}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{x^3y^3} - \sqrt[3]{x^3y^2} - \sqrt[3]{y^5}} - \left(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}\right).$$

* Здесь и в дальнейшем в скобках указан номер, под которым данный пример содержится в „Сборнике конкурсных задач по математике для поступающих во втузы" под редакцией М. И. Сканави, М., „Высшая школа", 1978.

Решение. Для упрощения этого выражения разложим на множители знаменатель дроби. Для этого сгруппируем слагаемые и вынесем за скобки общие множители, записывая корни как степени с дробными показателями:

$$\left(x^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{2}{3}}y\right)-\left(xy^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{5}{3}}\right)=x^{\frac{2}{3}}(x+y)-y^{\frac{2}{3}}(x+y)=$$
$$=(x+y)\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Сделав преобразования и в числителе дроби, будем иметь

$$A=\frac{(x-y)(x+y)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{(x+y)\left(x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}\right)}-\left((xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=$$
$$=\frac{(x-y)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}}-\left((xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Выражение $x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}$ запишем как разность квадратов:

$$x^{\frac{2}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right),$$

а $x-y$ как разность кубов:

$$x-y=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^3-\left(y^{\frac{1}{3}}\right)^3=\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right).$$

Подставляя в $A$, получим

$$A=\frac{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}\right)\left(x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}\right)}-$$
$$-\left((xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}\right)=x^{\frac{2}{3}}+(xy)^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}-(xy)^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{2}{3}}=$$
$$=x^{\frac{2}{3}},\quad x\neq\pm y.$$

*Ответ:* $A=x^{\frac{2}{3}}$ при $x\neq\pm y$.

2. (2.217) Упростить

$$A=\frac{b^{\frac{1}{6}}\sqrt{a^3b}\sqrt[3]{a^3b}-\sqrt[3]{b^2}\sqrt{a^3b^3}}{(2a^2-ab-b^2)\sqrt[6]{a^3b^3}}:\left(\frac{3a^2}{2a^2-ab-b^2}-\frac{ab}{a-b}\right).$$

Решение. Очевидные ограничения: $a>0$, $b>0$, $a\neq b$. *Преобразуем сначала первую дробь, записывая* все корни как степени с дробными показателями:

$$\frac{b^{\frac{1}{6}}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}ab^{\frac{1}{3}}-b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{2}}b}{(2a^2-ab-b^2)a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}}=\frac{b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{3}{2}}(a-b)}{(2a^2-ab-b^2)a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{2}{3}}}=\frac{a-b}{2a^2-ab-b^2}.$$

Знаменатель полученной дроби раскладываем на множители:

$$2a^2-ab-b^2=a^2+a^2-ab-b^2=(a^2-b^2)+(a^2-ab)=$$
$$=(a-b,(a+b)+a(a-b)=(a-b)(2a+b).$$

Тогда

$$\frac{a-b}{2a^2-ab-b^2}=\frac{a-b}{(a-b)(2a+b)}=\frac{1}{2a+b}.$$

Теперь преобразуем выражение в круглых скобках:

$$\frac{3a^2}{(2a+b)(a-b)}-\frac{ab}{a-b}=\frac{3a^2-ab(2a+b)}{(2a+b)(a-b)}=$$
$$=\frac{a(3a^2-2ab-b^2)}{(2a+b)(a-b)}=\frac{a(3a+b)(a-b)}{(2a+b)(a-b)}=\frac{a(3a+b)}{2a+b}.$$

Подставляя в $A$, находим

$$A=\frac{1}{2a+b}:\frac{a(3a+b)}{2a+b}=\frac{1}{a(3a+b)}.$$

*Ответ:* $A=\frac{1}{a(3a+b)}$ при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$.

Упростить выражения:

3. $\left(\frac{x^5+x^{-1}}{x^3-x+x^{-1}}\right):\frac{(x-x^{-1})^2+4}{1+x^{-2}}$.

4. $\left(\frac{x^3-2y}{x^2-\sqrt[3]{4y^2}}+\frac{x^2\sqrt[3]{2y}+x\sqrt[3]{4y^2}}{x^2+\sqrt[3]{4y^2}+x\sqrt[3]{16y}}\right)(x+\sqrt[3]{2y})^{-1}$.

5. $\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt[4]{x}-2}+2\sqrt[4]{x}\right)^{\frac{1}{2}}(4x-\sqrt{x^3})^{-1}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+8}{\sqrt[4]{x}+2}-x^{\frac{1}{2}}\right)$.

6. $\left(\frac{x^2+a^2\sqrt{x}+ax\sqrt{x}+a^4}{(\sqrt{x}+a)^2}-a\sqrt{x}\right)\frac{1}{x-a^2}+\frac{2a}{\sqrt{x}+a}$.

**7.** (2.164) Упростить

$$A=\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}.$$

Решение. Находим ограничения:

$$(x^2-9>0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x>3,\\ x<-3.\end{array}\right.$$

Рассмотрим отдельно эти случаи:

1) если $x>3$, то $x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$; $x^2-2x-3=(x-3)(x+1)$; $x+3=(\sqrt{x+3})^2$, $(\sqrt{x-3})^2=x-3$.

Подставляя в $A$, находим

$$A=\frac{(x+3)(x-1)+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{(x-3)(x+1)+(x-1)\sqrt{x^2-9}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{x+3})^2(x-1)+(x+1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}{(\sqrt{x-3})^2(x+1)+(x-1)\sqrt{(x+3)(x-3)}}.$$

В числителе выносим за скобки общий множитель $\sqrt{x+3}$, а в знаменателе $\sqrt{x-3}$. Тогда получим

$$\frac{\sqrt{x+3}(\sqrt{x+3}(x-1)+(x+1)\sqrt{x-3})}{\sqrt{x-3}(\sqrt{x-3}(x+1)+(x-1)\sqrt{x+3})}=\frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}};$$

2) если $x<-3$, то $x+3<0$, $x-3<0$. Поэтому

$$x+3=-|x+3|=-(\sqrt{|x+3|})^2,$$
$$x-3=-|x-3|=-(\sqrt{|x-3|})^2.$$

Применяя (9), находим

$$\sqrt{(x+3)(x-3)}=\sqrt{|x+3|}\sqrt{|x-3|}.$$

Подставляя в $A$ и выполнив преобразования, получим

$$A=\frac{-(\sqrt{|x+3|})^2(x-1)+(x+1)\sqrt{|x+3|}\sqrt{|x-3|}}{-(\sqrt{|x-3|})^2(x+1)+(x-1)\sqrt{|x+3|}\sqrt{|x-3|}}=$$
$$=\frac{-\sqrt{|x+3|}((x-1)\sqrt{|x+3|}-(x+1)\sqrt{|x-3|})}{\sqrt{|x-3|}((x-1)\sqrt{|x+3|}-(x+1)\sqrt{|x-3|})}=$$
$$=-\frac{\sqrt{|x+3|}}{\sqrt{|x-3|}}=-\sqrt{\frac{x+3}{x-3}}.$$

*Ответ:* $A=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} & \text{при } x>3,\\ -\sqrt{\dfrac{x+3}{x-3}} & \text{при } x<-3.\end{cases}$

8. Упростить

$$A = (2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2 : \left( \frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2 b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} \right).$$

Решение. Очевидные ограничения: $a > 0$, $b > 0$. Сначала преобразуем выражение, стоящее во вторых скобках:

$$\frac{a^2 - 7a\sqrt{b} + 9b}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt[4]{a^2 b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} =$$

$$= \frac{(a^2 + 9b - 6a\sqrt{b}) + 6a\sqrt{b} - 7a\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} =$$

$$= \frac{(a - 3\sqrt{b})^2 - a\sqrt{b}}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \frac{(a - 3\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a}\sqrt[4]{b})^2}{a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b}} +$$

$$+ \frac{13\sqrt{b}}{4} = a - 3\sqrt{b} - \sqrt{a}\sqrt[4]{b} + \frac{13\sqrt{b}}{4} = \frac{1}{4}(4a - 4\sqrt{a}\sqrt[4]{b} +$$

$$+ \sqrt{b}) = \frac{1}{4}(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2.$$

Подставляя в $A$, находим

$$A = (2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2 : \frac{(2\sqrt{a} - \sqrt[4]{b})^2}{4} = 4.$$

*Ответ:* $A = 4$ при $2\sqrt{a} \neq \sqrt[4]{b}$, $a - 3\sqrt{b} + \sqrt{a}\sqrt[4]{b} \neq 0$, $a > 0$, $b > 0$.

9. (2.112) Упростить

$$\left( \sqrt[3]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} - t^3} + \sqrt[3]{\frac{t^6 + 2t^4 + 4t^3}{4 - 4t + t^2}} \right) : \left( \frac{1}{\sqrt{t} - \sqrt{2}} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{t} + \sqrt{2}} \right).$$

Решение. Очевидные ограничения: $t \geqslant 0$, $t \neq 2$. Выполняем преобразования:

$$\left( \sqrt[3]{8 - t^3} + \sqrt[3]{\frac{t^3(t^3 + 2t + 4)}{(t - 2)^2}} \right) : \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} =$$

$$= \left( \sqrt[3]{8 - t^3} + \frac{t\sqrt[3]{(t^3 + 2t + 4)(2 - t)}}{\sqrt[3]{(2 - t)^3}} \right) : \frac{2\sqrt{2}}{t - 2} =$$

$$= \left(\sqrt[3]{8-t^3} + \frac{t\sqrt[3]{8-t^3}}{2-t}\right) : \frac{2\sqrt{2}}{t-2} = \sqrt[3]{8-t^3} \cdot \frac{2}{2-t} : \frac{2\sqrt{2}}{t-2} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}.$$

*Ответ:* $\frac{\sqrt[3]{t^3-8}}{\sqrt{2}}$ при $t \geqslant 0$, $t \neq 2$.

**10.** Упростить

$$\left(\sqrt[\frac{2}{3}]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[8]{a^{12}}}} + \sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{b^3}}}\right) : (\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}).$$

Решение. Очевидные ограничения: $a > 0$, $b > 0$. Записываем все корни как степени с дробными показателями и выполняем преобразования:

$$\left(\left(\frac{ab^{\frac{1}{3}}}{ba^{\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{ab^{\frac{3}{8}}}\right)^2\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\left(\frac{1}{b^{\frac{2}{3}}a^{\frac{1}{2}}}\right)^{\frac{3}{2}} +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{8}}}\right)^2\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \left(\frac{1}{ba^{\frac{3}{4}}} + \frac{1}{ab^{\frac{3}{4}}}\right) : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}}{ab} : \left(a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}\right) = \frac{1}{ab}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{ab}$ при $a > 0$, $b > 0$.

Упростить выражения:

**11.** (2.163) $\left(\frac{\left(a + (2a^2x)^{\frac{1}{3}}\right)\left(2x + \sqrt[3]{4ax^2}\right)^{-1} - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{2x}} - (2x)^{\frac{1}{3}-1}\right)^{-6}$

**12.** $\frac{4\sqrt{a}\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}\right)^2}{\left(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}\right)^4 - 1}$.

**13.** (2.013) $\frac{\left(\sqrt{a} + \sqrt{a+1}\right)^{-1} + \left(\sqrt{a} - \sqrt{a-1}\right)^{-1}}{1 + \sqrt{a+1}\left(\sqrt{a} - \sqrt{a-1}\right)^{-1}}$.

**14.** $\left(\dfrac{a-8\sqrt{ab}+4b}{\sqrt{a}-2\sqrt[4]{ab}-2\sqrt{b}}+3\sqrt{b}\right)(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})^{-2}$.

**15.** Упростить

$$\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}-1+\frac{(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}+(x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Решение. Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x^2-3x+2>0, \\ x^2+3x+2>0, \\ x\neq 0, \end{cases}$$

находим область определения ($D$):

$$x\in\,]-\infty;\ -2[\cup]-1;\ 0[\cup]0;\ 1[\cup]2;\ +\infty[.$$

Обозначим $(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}=a$, $(x^2+3x+2)^{\frac{1}{2}}=b$, тогда

$$A=-1+\frac{(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}}=$$

$$=\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}-1=\frac{b-a}{b+a}-1=\frac{-2a}{b+a}.$$

Подставим вместо $a$ и $b$ их значения и избавимся от иррациональности в знаменателе:

$$A=\frac{-2\sqrt{x^2-3x+2}}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2}}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{x^2-3x+2}\,(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2})}{(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2-3x+2})(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-3x+2})}=$$

$$=\frac{-2\sqrt{x^4-5x^2+4}+2(\sqrt{x^2-3x+2})^2}{6x}=$$

$$=\frac{-\sqrt{x^4-5x^2+4}+(x^2-3x+2)}{3x}.$$

Окончательно получаем

$$\frac{\sqrt{x^4-5x^2+4}}{3x}+\frac{-\sqrt{x^4-5x^2+4}+(x^2-3x+2)}{3x}=$$

$$=\frac{x^2-3x+2}{3x}.$$

*Ответ:* $\dfrac{x^2-3x+2}{3x}$, $x\in D$.

Прежде чем перейти к решению следующего примера, нужно ознакомиться с делением многочлена на многочлен: старший член делимого делят на старший член делителя, затем частное от деления умножают на многочлен-делитель и от многочлена-делимого отнимают полученное произведение; полученную разность аналогичным образом делят на многочлен-делитель и находят второй член многочлена-частного и т. д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока деление не закончится либо степень остатка будет меньше степени делителя.

Например:

1) $3x^4 - 5x^3 + 6x - 4 \;\big|\; x - 1$

$3x^4 - 3x^3 \;\big|\; 3x^3 + 3x^2 - 2x + 4$

$-3x^3 + 6x - 4$

$-3x^3 - 3x^2$

$-2x^2 + 6x - 4$

$-2x^2 + 2x$

$4x - 4$

$4x - 4$

$0$

В остатке получили 0.

Обозначим: $P(x)$ — делимое, $Q(x)$ — делитель, $N(x)$ — частное, $R(x)$ — остаток. В данном случае имеем: $P(x) = 3x^4 - 5x^3 + 6x - 4$; $Q(x) = x - 1$; $N(x) = 3x^3 + 3x^2 - 2x + 4$; $R(x) = 0$.

2) $x^2 + x - 3\sqrt{x} + 6 \;\big|\; x + 2\sqrt{x} + 3$

$x^2 + 2x\sqrt{x} + 3x \;\big|\; x - 2\sqrt{x} + 2$

$-2x\sqrt{x} - 2x - 3\sqrt{x} + 6$

$-2x\sqrt{x} - 4x - 6\sqrt{x}$

$2x + 3\sqrt{x} + 6$

$2x + 4\sqrt{x} + 6$

$-\sqrt{x}$

Имеем: $P(x) = x^3 + x - 3\sqrt{x} + 6$; $Q(x) = x + 2\sqrt{x} + 3$,
$R(x) = -\sqrt{x}$,
$N(x) = x - 2\sqrt{x} + 2$.

**16.** (2.263) Упростить

$$\frac{x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} - x\sqrt{2}.$$

Решение. *Первый способ.* Разделим числитель на знаменатель, получим $x^2 + x\sqrt{2} + 1$, тогда $x^2 + x\sqrt{2} + 1 - x\sqrt{2} = x^2 + 1$.

*Второй способ.* Сгруппируем в числителе слагаемые, прибавив и отняв $x\sqrt{2}$:

$$\frac{x^4 + 2x\sqrt{2} + (x^2 - x\sqrt{2} + 2)}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} = \frac{x(x^3 + 2\sqrt{2})}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} + 1.$$

Раскладывая сумму кубов и сокращая, получим

$$\frac{x(x + \sqrt{2})(x^3 - x\sqrt{2} + 2)}{x^2 - x\sqrt{2} + 2} + 1 = x^2 + x\sqrt{2} + 1.$$

Окончательно имеем $x^2 + x\sqrt{2} + 1 - x\sqrt{2} = x^2 + 1$.

*Ответ:* $x^2 + 1$.

**17.** (2.063) Упростить

$$\frac{x^{-6} - 64}{4 + 2x^{-1} + x^{-2}} \cdot \frac{x^3}{4 - 4x^{-1} + x^{-2}} - \frac{4x^2(2x + 1)}{1 - 2x}.$$

Решение. Находим область определения: $x \neq 0$; $(1 - 2x \neq 0) \leftrightarrow \left(x \neq \frac{1}{2}\right)$. Раскладываем выражение $x^{-6} - 64$ как разность квадратов:

$$x^{-6} - 64 = (x^{-3} - 8)(x^{-3} + 8),$$

затем выражение $x^{-3} - 8$ раскладываем как разность кубов и, выполнив действие умножения, получаем

$$\frac{(x^{-3} - 2)(x^{-2} + 2x^{-1} + 4)(x^{-3} + 8)x^3}{(4 + 2x^{-1} + x^{-2})(x^{-1} - 2)^2} = \frac{\left(\frac{1}{x^3} + 8\right)x^3}{\frac{1}{x} - 2} = \frac{1 + 8x^3}{1 - 2x}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{1+8x^3}{1-2x}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x}=\frac{1-4x^2}{1-2x}=1+2x.$$

*Ответ:* $1+2x$ при $x\neq 0$, $x\neq\frac{1}{2}$.

Упростить выражения:

18. $(2.044)\left(\frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}+\frac{a-b}{\sqrt{a^2-b^2}-a+b}\right)\times$
$\times\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

19. $\frac{27-x}{3+\sqrt[3]{x}}:\left(3+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{3+\sqrt[3]{x}}\right)-\left(\sqrt[3]{x}+\frac{3\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}-3}\right)\times$
$\times\frac{9-\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}}$.

20. $\frac{(x-y)^2(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{-2}-y\sqrt{y}+2x\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}+\frac{3x+3\sqrt{xy}}{y-x}$.

21. $\frac{(\sqrt[3]{a^2}-b)\sqrt[3]{a^2}}{(a-b\sqrt{b})(\sqrt[3]{a}-\sqrt{b})^{-1}-b}\left(\frac{a\sqrt{b^{-1}}+b}{1+a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{2}}}-b\right)^{-1}$

22. $\left(\frac{4-9x^{-2}}{2x^{-\frac{1}{2}}+3x^{-\frac{3}{2}}}-\frac{1-x^{-1}-6x^{-2}}{x^{-\frac{1}{2}}+2x^{-\frac{3}{2}}}\right)^2$.

23. $\left(\frac{(\sqrt[3]{xy^2\sqrt{y}}-\sqrt[3]{xy}\sqrt{x})^2}{xy\sqrt[6]{xy}}+4\right)\frac{y\sqrt{x}-x\sqrt{y}}{\sqrt{y}+\sqrt{x}}$.

24. $\left(\sqrt[\frac{1}{2}]{\frac{x^2\sqrt{y}}{y\sqrt{x}}}-\sqrt[1,5]{\frac{y^2\sqrt[3]{x}}{x^4\sqrt{y}\sqrt[6]{x^5}}}\right)\frac{yx^2}{x^2-y}-y$.

25. $\left(\frac{2x^2-5+(x-1)\sqrt{4x^2-25}-3x}{2x^2-5+(x+1)\sqrt{4x^2-25}+3x}\right)^2$.

26. $\left(\frac{(3x+\sqrt[3]{36ax^2})(4a+\sqrt[3]{48xa^2})^{-1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{3x}-\sqrt[3]{8a}}-\sqrt[-3]{2a}\right)^3$.

27. $\left(2+\frac{1}{3b^{-1}}+\frac{3}{b}\right)\left((b-3)\sqrt[4]{(b+3)^{-4}}+1\right)^2$.

28. $\frac{(x+\sqrt{x^2-2xy})(x-2y+\sqrt{x^2-2xy})}{2(x-y+\sqrt{x^2-2xy})}$.

29. $\left(\frac{a^2-ab+b^2}{2a-2b}+\frac{3ab^2+b^3+3a^2b}{a^3-b^3}+\frac{b^2+ab+a^2}{2a+2b}\right)^{\frac{1}{3}}\times$
$\times\sqrt[3]{a^3-b^3}$.

30. $\left(\frac{b^4+b^2-2b+6}{b^2+2b+3}+2\right)(b+2)$.

## § 2. Приведение радикалов к одному показателю

Рассмотрим примеры, содержащие произведение корней с различными показателями.

31. Упростить $\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}\sqrt[6]{1-x\sqrt{2-x^2}}$ при $|x|\leqslant 1$.

Решение. Представим $\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}$ в виде

$$\sqrt[3]{x+\sqrt{2-x^2}}=\sqrt[6]{(x+\sqrt{2-x^2})^2}=\sqrt[6]{2(1+x\sqrt{2-x^2})}.$$

Тогда данное выражение примет вид

$$\sqrt[6]{2(1+x\sqrt{2-x^2})(1-x\sqrt{2-x^2})}=$$
$$=\sqrt[6]{2(1-x^2(2-x^2))}=\sqrt[6]{2}\sqrt[6]{(1-x^2)^3}=\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{1-x^2}.$$

Таким образом, при решении данного примера мы сначала привели корни к одному показателю, а затем выполнили преобразования.

32. (2.193) Упростить $\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$.

Решение. Имеем

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt[4]{(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}=$$
$$=\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$$

и окончательно

$$\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{49-(4\sqrt{3})^2}=$$
$$=\sqrt[4]{49-48}=1.$$

Иногда нужно исследовать знак подкоренного выражения, прежде чем приводить корни к одному показателю. Покажем это на примере.

**33.** Упростить $\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}\,\sqrt[6]{4(11+4\sqrt{6})}$.

Решение. Применение формулы $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$, $a>0$, привело бы к ошибке, так как подкоренное выражение $2\sqrt{3}-4\sqrt{2}$ отрицательно ($2\sqrt{3}=\sqrt{12}$, $4\sqrt{2}=\sqrt{32}$), а при возведении в квадрат получаем положительное число. Поэтому нужно сначала выполнить преобразование

$$\sqrt[3]{2\sqrt{3}-4\sqrt{2}}=-\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}},$$

а затем применить формулу $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$. Имеем

$$-\sqrt[3]{4\sqrt{2}-2\sqrt{3}}=-\sqrt[6]{(4\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2}$$

и окончательно

$$-\sqrt[6]{4(11-4\sqrt{6})\,4(11+4\sqrt{6})}=$$
$$=-\sqrt[6]{4^2(11^2-(4\sqrt{6})^2)}=-\sqrt[6]{20^2}=-\sqrt[3]{20}.$$

*Ответ:* $-\sqrt[3]{20}$.

Упростить выражения:

**34.** (2.023) $\sqrt[4]{6x(5+2\sqrt{6})}\sqrt{3\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}$.

**35.** (2.191) $\left(\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{2+\sqrt{5}}\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}\right)^{-1}-1$.

**36.** $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}$.

**37.** $\left(\sqrt[6]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\right)\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$.

**38.** (2.299) $\dfrac{\sqrt[8]{26-15\sqrt{3}}\,(2-\sqrt{3})}{7-4\sqrt{3}}$.

**39.** (2.275) $x\sqrt[3]{x\sqrt{3xy}-2x\sqrt{xy}}\,\sqrt[6]{x^3y(7+4\sqrt{3})}$.

**40.** $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}+\sqrt[3]{\sqrt{x}(x+27)-9x-27}}{\sqrt{x}-2}$.

## § 3. Выделение полного квадрата под радикалом

Рассмотрим выражения вида $\sqrt{a+2\sqrt{b}}$. Упрощение подобных выражений состоит в следующем: представим подкоренное выражение в виде

$$a+2\sqrt{b}=x+y+2\sqrt{xy},$$

где $\sqrt{b}=\sqrt{xy}$, $a=x+y$, тогда

$$a+2\sqrt{b}=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

Например, при упрощении выражения $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ имеем

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{2\cdot\sqrt{3}\cdot 1+1+3}=$$
$$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1.$$

**41.** Упростить $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

**Решение.** Преобразуем подкоренное выражение

$$5-2\sqrt{6}=5-2\sqrt{3}\sqrt{2}=3+2-2\sqrt{3}\sqrt{2}=(\sqrt{3})^2+$$
$$+(\sqrt{2})^2-2\sqrt{3}\sqrt{2}=(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2.$$

Окончательно имеем

$$\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$$

**42.** Упростить $\sqrt{7-2\sqrt{6}}$.

**Решение.** Преобразуем подкоренное выражение

$$7-2\sqrt{6}=7-2\cdot 1\cdot\sqrt{6}=6+1-2\sqrt{6}=(\sqrt{6}-1)^2$$

и получим

$$\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}=\sqrt{6}-1.$$

**43.** Упростить $\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}}$.

**Решение.** Преобразуем подкоренное выражение:

$$2a+2\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}=(a-2)+(a+2)+2\sqrt{a-2}\times$$
$$\times\sqrt{a+2}=(\sqrt{a-2})^2+(\sqrt{a+2})^2+2\sqrt{a-2}\sqrt{a+2}=$$
$$=(\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2})^2.$$

Таким образом,

$$\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-4}}=\sqrt{(\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2})^2}=$$
$$=\sqrt{a-2}+\sqrt{a+2}.$$

**44.** Упростить

$$A=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}((\sqrt{1+x})^3-(\sqrt{1-x})^3)\times$$
$$\times(2+\sqrt{1-x^2})^{-1}.$$

Решение. Очевидные ограничения: $|x|\leqslant 1$. Разложим выражение $(\sqrt{1+x})^3-(\sqrt{1-x})^3$ как разность кубов:

$$(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})((\sqrt{1+x})^2+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}+$$
$$+(\sqrt{1-x})^2)=(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x^2}).$$

Имеем

$$A=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+\sqrt{1-x^2})\times$$
$$\times(2+\sqrt{1-x^2})^{-1}=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\times$$
$$\times\sqrt{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})^2}=\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\times$$
$$\times\sqrt{2-2\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{2}\sqrt{(1+\sqrt{1-x^2})(1-\sqrt{1-x^2})}=$$
$$=\sqrt{2x^2}=|x|\sqrt{2}.$$

*Ответ:* $|x|\sqrt{2}$ при $|x|\leqslant 1$.

**45.** Упростить $\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$.

Решение. Область определения: $(2x-4\geqslant 0)\leftrightarrow(x\geqslant 2)$. Имеем

$$x-2\sqrt{2x-4}=x-2\sqrt{2(x-2)}=x-2\sqrt{2}\sqrt{x-2}.$$

Прибавим и вычтем два, тогда получим

$$(x-2)+2-2\sqrt{2}\sqrt{x-2}=(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2.$$

Окончательно имеем

$$\sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}=\sqrt{(\sqrt{x-2}-\sqrt{2})^2}=|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|.$$

*Ответ:* $|\sqrt{x-2}-\sqrt{2}|$ при $x\geqslant 2$.

46. Упростить $\sqrt{1-2\sqrt{m-m^2}}$.

Решение. Решая неравенство $m-m^2\geqslant 0$, находим область определения: $m\in[0;\ 1]$. Выполним преобразования

$$1-2\sqrt{m(1-m)}=1-2\sqrt{m}\sqrt{1-m}=(1-m)+m-$$
$$-2\sqrt{m}\sqrt{1-m}=(\sqrt{1-m}-\sqrt{m})^2.$$

Данное выражение преобразуется к виду

$$\sqrt{(\sqrt{1-m}-\sqrt{m})^2}=|\sqrt{1-m}-\sqrt{m}|.$$

*Ответ:* $|\sqrt{1-m}-\sqrt{m}|$ при $m\in[0;\ 1]$.

Упростить выражения:

47. (2.342) $\dfrac{\sqrt[-2]{2x+5+4\sqrt{2x+1}}+\sqrt[-2]{2x+5-4\sqrt{2x+1}}}{\sqrt[-2]{2x+5+4\sqrt{2x+1}}-\sqrt[-2]{2x+5-4\sqrt{2x+1}}}$.

48. $\left(\sqrt{9-6\sqrt{2}}-\sqrt{6}\right)^2$.

49. $\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x^2-y^2}}-\sqrt{x-\sqrt{x^2-y^2}}}{\sqrt{2(x-y)}}$; $y>0$.

50. $3+\left(\sqrt{2x+6+6\sqrt{2x-3}}-3\right)^2$.

51. (2.227) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$.

52. (2.316) $(x+2\sqrt{2x-4})^{-\frac{1}{2}}+(x-2\sqrt{2x-4})^{-\frac{1}{2}}$.

## § 4. Примеры с модулями

Отметим, что при решении примеров с модулями применяется метод промежутков. Суть его состоит в следующем:

1) приравниваем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля;

2) полученные значения буквенных величин откладываем в области определения данного выражения;

3) исследуем алгебраическое выражение в каждом из полученных промежутков.

53. Упростить $A=\dfrac{|x-1|+|x|+x}{3x^3-4x+1}$.

Решение. Разложим на множители знаменатель

$$3x^2-4x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)(x-1)=(3x-1)(x-1).$$

Далее решаем совокупность уравнений

$$\begin{bmatrix} |x| = 0, \\ |x-1| = 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} x = 0, \\ x = 1 \end{bmatrix}$$

и рассматриваем алгебраическое выражение в промежутках

$$x \leqslant 0;\ 0 < x \leqslant 1;\ x > 1.$$

а) Пусть $x \leqslant 0$, тогда $|x| = -x$, $|x-1| = 1-x$ и $A$ имеет вид

$$A = \frac{1-x-x+x}{(3x-1)(x-1)} = \frac{-(x-1)}{(3x-1)(x-1)} = \frac{1}{3x-1},\ x \neq \frac{1}{3},\ x \neq 1.$$

б) Пусть $0 < x \leqslant 1$, тогда $|x| = x$, $|x-1| = 1-x$ и получаем

$$A = \frac{1-x+x+x}{(3x-1)(x-1)} = \frac{x+1}{(3x-1)(x-1)},\ x \neq 1,\ x \neq \frac{1}{3}.$$

в) Пусть $x > 1$, тогда $|x| = x$, $|x-1| = x-1$ и

$$A = \frac{x-1+x+x}{(3x-1)(x-1)} = \frac{3x-1}{(3x-1)(x-1)} = \frac{1}{x-1},\ x \neq 1.$$

*Ответ:* $A = \begin{cases} -\dfrac{1}{3x-1}, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \dfrac{x+1}{(3x-1)(x-1)}, & \text{если } 0 < x < 1,\ x \neq \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{x-1}, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Иногда в процессе решения примеров получаем выражения, содержащие модули. Например:

54, (2.157) Упростить $A = \dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2 - 3}}$.

Решение. Очевидные ограничения: $a \neq 0$. После преобразований получаем

$$A = \frac{a^2-3}{\sqrt{\dfrac{a^4+6a^2+9}{4a^2} - 3}} = \frac{(a^2-3)\sqrt{4a^2}}{\sqrt{a^4-6a^2+9}} = \frac{(a^2-3)\,2|a|}{\sqrt{(a^2-3)^2}} = \frac{(a^2-3)\,2|a|}{|a^2-3|},$$

где $a^2-3 \neq 0$. Далее решаем совокупность уравнений

$$\begin{bmatrix} |a| = 0, \\ |a^2-3| = 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} a = 0, \\ a = -\sqrt{3}, \\ a = \sqrt{3}. \end{bmatrix}$$

Таким образом, числовая прямая разбивается на четыре промежутка (рис. 1): $a<-\sqrt{3}$; $-\sqrt{3}<a<0$; $0<a<\sqrt{3}$; $a>\sqrt{3}$.

Рис. 1

Исследуем $A$ в каждом из этих промежутков;

1) если $a<-\sqrt{3}$, то $|a|=-a$, $|a^2-3|=a^2-3$ и

$$A=\frac{2(a^2-3)(-a)}{a^2-3}=-2a;$$

2) если $-\sqrt{3}<a<0$, то $|a|=-a$, $|a^2-3|=3-a^2$ и

$$A=2a;$$

3) если $0<a<\sqrt{3}$, то $|a|=a$, $|a^2-3|=3-a^2$ и

$$A=-2a;$$

4) если $a>\sqrt{3}$, то $|a|=a$, $|a^2-3|=a^2-3$ и

$$A=2a.$$

*Ответ:* $A=\begin{cases}2a, & \text{если } -\sqrt{3}<a<0,\ a>\sqrt{3},\\ -2a, & \text{если } a<-\sqrt{3},\ 0<a<\sqrt{3}.\end{cases}$

Упростить выражения:

55. $\dfrac{1-\sqrt{2x-1}}{\sqrt{x-\sqrt{2x-1}}}$.

56. $\dfrac{\sqrt{(x+2)^2-8x}}{\sqrt{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}}$.

57. $\sqrt{t+\sqrt{2t-1}}-\sqrt{t-\sqrt{2t-1}}$.

58. $\sqrt{4t^2-24t+36}-2|t|$.

59. $\left(\dfrac{a^2}{a-1}-(1-a)^{-1}\right)\dfrac{1+a(a-2)}{(a^2-a+1)\sqrt{(a+1)^2}}$.

60. $\dfrac{||x|-1|(|x|+1)}{x^2-1}$.

61. (2.313) $|x^2-1|+x|x+1|$.

62. (2.347) $\sqrt{x(x^{-1}+4x+4)^{-1}}-\dfrac{2x^2}{|2x-1|}$.

63. (2.348) $\left|\dfrac{|x-2|+4}{x-2}\right|(x^2-4)$.

64. (2.359) $\dfrac{(x+2)\sqrt{(x+2)^2-8x}}{x^2-4|x-1|}$.

## § 5. Применение различных методов

Рассмотрим несколько примеров на упрощение алгебраических выражений, используя различные методы решения.

65. (2.200) Упростить

$$A=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right).$$

Решение. Очевидные ограничения: $x\geqslant 0$. Запишем все корни как степени с дробными показателями и разложим числитель первой дроби как разность кубов, а числитель второй дроби как сумму кубов:

$$A=\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}-y}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}}-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{x^{\frac{3}{4}}+y}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\left(\frac{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}}-3x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times\left(\frac{(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{3}})(x^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{4}}y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{3}}}-y^{\frac{2}{3}}\right)=$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}})}{\sqrt{(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}})^3}}.$$

Производя сокращения, предполагаем, что $x^{\frac{1}{4}}\neq y^{\frac{1}{3}}$, $x^{\frac{1}{4}}\neq -y^{\frac{1}{3}}$.

Далее имеем

$$A=\frac{x^{\frac{1}{4}}(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}})}{|x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}|}.$$

Рассмотрим два случая:

1) если $x^{\frac{1}{4}}>y^{\frac{1}{3}}$, то $|x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}|=x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{3}}$ и, следовательно, $A=x^{\frac{1}{4}}$;

2) если $x^{\frac{1}{4}} < y^{\frac{1}{3}}$, то $|x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}}| = -(x^{\frac{1}{4}} - y^{\frac{1}{3}})$ и, следовательно, $A = -x^{\frac{1}{4}}$.

*Ответ:* $A = \begin{cases} x^{\frac{1}{4}}, \text{ если } x^{\frac{1}{4}} > y^{\frac{1}{3}} \\ -x^{\frac{1}{4}}, \text{ если } x^{\frac{1}{4}} < y^{\frac{1}{3}}, \end{cases}$ при $x \geqslant 0$, $x^{\frac{1}{4}} \neq \pm y^{\frac{1}{3}}$.

**66.** (2.218) Упростить:

$$A = \sqrt{x + 2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x - 2\sqrt{2x-4}}.$$

Решение. Находим область определения: $(2x - 4 \geqslant 0) \Rightarrow (x \geqslant 2)$. Преобразуем выражения, находящиеся под радикалами:

$$x + 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} = (x-2) + 2 + 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} = (\sqrt{x-2} + \sqrt{2})^2;$$

$$x - 2\sqrt{2x-4} = (x-2) + 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x-2} = (\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2.$$

Тогда получим

$$A = \sqrt{(\sqrt{x-2} + \sqrt{2})^2} + \sqrt{(\sqrt{x-2} - \sqrt{2})^2} = |\sqrt{x-2} + \sqrt{2}| + |\sqrt{x-2} - \sqrt{2}|.$$

Поскольку выражение $\sqrt{x-2} + \sqrt{2}$ всегда положительно, то $|\sqrt{x-2} + \sqrt{2}| = \sqrt{x-2} + \sqrt{2}$. Рассмотрим два случая:

1) если $\sqrt{x-2} > \sqrt{2}$, то $|\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = \sqrt{x-2} - \sqrt{2}$ и, следовательно, $A = 2\sqrt{x-2}$;

2) если $0 < \sqrt{x-2} < \sqrt{2}$, то $|\sqrt{x-2} - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - \sqrt{x-2}$ и, следовательно, $A = 2\sqrt{2}$.

*Ответ:* $A = \begin{cases} 2\sqrt{x-2}, \text{ если } \sqrt{x-2} > \sqrt{2}, \\ 2\sqrt{2}, \text{ если } \sqrt{x-2} < \sqrt{2}, \end{cases}$ $x \geqslant 2$.

**67.** (2.238) Упростить $\dfrac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}}$.

Решение. Преобразуем знаменатель, для чего выделим полный квадрат под радикалом:

$$\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{3 + 1 + 2\sqrt{3}} = \sqrt{(\sqrt{3} + 1)^2} = \sqrt{3} + 1,$$

тогда

$$\sqrt{3}+1-\sqrt{3}=1.$$

Чтобы упростить числитель, представим $\sqrt{2}-1$ следующим образом:

$$\sqrt{2}-1=\sqrt[3]{(\sqrt{2}-1)^3}=\sqrt[3]{2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1}=$$
$$=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}.$$

Далее имеем

$$A=\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}\,\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=\sqrt[3]{(5\sqrt{2})^3-7^3}=$$
$$=\sqrt[3]{50-49}=1.$$

**68.** Упростить

$$\left(\frac{(1-x^2)^{-0,5}+1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{(1-x^2)^{-0,5}-1}{2}\right)^{-1},$$

если $x=2k^{0,5}(1+k)^{-1}$, $k>1$.

Решение. Сначала упростим выражение $(1-x^2)^{-0,5}$:

$$(1-x^2)^{-0,5}=\left(1-\frac{4k}{(1+k)^2}\right)^{-0,5}=\left(\frac{(1+k)^2-4k}{(1+k)^2}\right)^{-0,5}=$$
$$=\left(\frac{(1-k)^2}{(1+k)^2}\right)^{-0,5}=\frac{|1+k|}{|1-k|}.$$

Так как $k>1$, то $|1-k|=k-1$, $|1+k|=1+k$. Имеем

$$(1-x^2)^{-0,5}=\frac{k+1}{k-1}.$$

Подставляя в данное выражение, получаем

$$\left(\frac{\frac{k+1}{k-1}+1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{\frac{k+1}{k-1}-1}{2}\right)^{-1}=\left(\frac{k}{k-1}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{k-1}\right)^{-1}=\frac{k^2-1}{k}.$$

*Ответ:* $\frac{k^2-1}{k}$.

Упростить выражения:

**69.** $\frac{\sqrt{(3x+2)^3-24x}}{3\sqrt{x}-2x^{-0,5}}$. **70.** $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{a^2}{x^2}-2\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)-1\right)^{\frac{1}{2}}$.

**71.** $\left(\frac{2y^2+x}{2}+y\sqrt{2xy}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{2y^2+x}{2}-y\sqrt{2xy}\right)^{\frac{1}{2}}$.

**72.** $\left(\left(\sqrt{b}+2\sqrt{\frac{b-1}{b}}\right)^{0,5}+\left(\sqrt{b}-2\sqrt{\frac{b-1}{b}}\right)^{0,5}\right)b^{\frac{1}{4}}$.

73. $(x^3y^3 - 9xy^2\sqrt{x} + 27xy - 27\sqrt{x})^{\frac{1}{3}}\sqrt[6]{x^{-1}} + 3$.

74. $\left(4x^2 - 4x + 1 + \frac{2x-1}{x}\right) : (2x^2 - x + 1 + x^{-1})$.

75. $\left(\frac{(x-2)\sqrt{x} + (y-2)\sqrt{y}}{x^2 - 2x + xy - \sqrt{yx^3}} - \frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2$.

76. $\sqrt{x} + \frac{\sqrt[3]{2-\sqrt{3}}\sqrt[6]{7+4\sqrt{3}} - x}{\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}\sqrt{2+\sqrt{5}} + \sqrt{x}}$.

77. $\left(\frac{\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}(1+\sqrt{2}) - \sqrt[3]{\sqrt{a}(a+12) - 2(3a+4)}}{1+\sqrt[4]{a}} - 1\right)^2$.

78. $\left(\sqrt[4]{12-6\sqrt{3}}\sqrt{3+\sqrt{3}} - 1\right)(1+\sqrt{6})$.

79. $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} - \sqrt{3}$.

80. $((5+2\sqrt{6})^{0.1} + (\sqrt{2}+\sqrt{3})^{0.2})(\sqrt{2}-\sqrt{3})^{0.2}$.

81. $\left(\frac{\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) + x^3}{1-\sqrt[3]{x^2}+x\sqrt[3]{x}} - 1\right)^{1.5}$.

ГЛАВА II

## АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

### Основные формулы

Квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0,\ a \neq 0, \tag{1}$$

имеет действительные корни, если его дискриминант неотрицателен:

$$D = b^2 - 4ac \geqslant 0. \tag{2}$$

В этом случае корни уравнения (1) находят по формулам

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{3}$$

Если $D < 0$, то уравнение (1) не имеет действительных корней. Для квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, согласно теореме Виета, существуют следующие

соотношения между корнями уравнения $x_1$ и $x_2$ и его коэффициентами:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \tag{4}$$

Для кубического уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0 \tag{5}$$

также справедлива теорема Виета:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = q, \quad x_1x_2x_3 = -r. \tag{6}$$

## § 1. Уравнения высших степеней

Рассмотрим кубическое уравнение

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0. \tag{7}$$

Если коэффициенты $p$, $q$, $r$ — целые числа, то целые корни уравнения (7) нужно искать среди делителей свободного члена $r$. Это вытекает из соотношений (6). Когда целый корень $x_1$ найден, производим деление многочлена $x^3 + px^2 + qx + r$ на $x - x_1$. Частное от деления — многочлен второй степени. Приравнивая его к нулю, получаем квадратное уравнение.

1. Решить уравнение $x^3 - x^2 - 21x + 45 = 0$.

Решение. Целые корни ищем среди чисел $\pm 1$; $\pm 3$; $\pm 5$; $\pm 9$; $\pm 15$; $\pm 45$. Проверяя эти числа, находим корень $x_1 = 3$. Делим многочлен $x^3 - x^2 - 21x + 45$ на $x - 3$, в частном получим многочлен $x^2 + 2x - 15$. Затем решаем уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$. Оно имеет два корня: $x = 3$, $x = -5$.

*Ответ:* $x \in \{3; -5\}$.

2. Решить уравнение $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = 0$.

Решение. Целые корни ищем среди чисел $\pm 1$; $\pm 2$. Проверяя эти числа, получаем $x = -1$. Делим $x^3 + 3x^2 + 4x + 2$ на $x + 1$, имеем $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (x + 1) \times (x^2 + 2x + 2)$. Приравниваем $x^2 + 2x + 2$ к нулю и решаем квадратное уравнение $x^2 + 2x + 2 = 0$. Так как дискриминант отрицателен ($D = -4$), то это уравнение не имеет действительных корней.

*Ответ:* $x \in \{-1\}$.

3. Решить уравнение $2x^3 + x^2 - 9 = 0$.

Решение. Делители свободного члена: $\pm 1$; $\pm 3$; $\pm 9$. Убеждаемся, что целых корней нет. Для отыскания

возможных рациональных корней этого уравнения умножим обе части уравнения на 4:

$$(8x^3+4x^2-36=0) \leftrightarrow ((2x)^3+(2x)^2-36=0).$$

Замена $2x=t$ приводит к уравнению $t^3+t^2-36=0$, корень которого $t=3$. Далее, $t^3+t^2-36=(t-3)(t^2+4t+12)$; уравнение $t^2+4t+12=0$ не имеет действительных корней, поэтому корень $t=3$ и, следовательно, $x=\frac{3}{2}$ является единственным корнем данного уравнения.

Аналогично решаются уравнения четвертой степени и уравнения высших степеней.

Для отыскания рациональных корней уравнения

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ \dots\ +a_n=0, \qquad (8)$$

где $a_0$, $a_1$, $\dots$, $a_n$ — целые числа, применяются различные методы. Один из них состоит в том, что обе части уравнения (8) умножают на $a_0^{n-1}$, а затем производят замену $a_0x=t$.

Другой метод состоит в том, что рациональные корни уравнения (8) ищем в виде $\frac{p}{q}$, где $p$ — делитель $a_n$; $q$ — делитель $a_0$, и $p$, $q$ — взаимно просты.

Проиллюстрируем эти методы на примерах.

4. Решить уравнение $4x^4+8x^3+x^2-3x-1=0$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 4 и произведем замену $2x=t$, получим

$$((2x)^4+4(2x)^3+(2x)^2-6(2x)-4=0) \leftrightarrow (t^4+4t^3+t^2-$$

$$-6t-4=0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t^3+3t^2-2t-4=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-1, \\ t^2+2t-4=0 \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1, \\ t=-1\pm\sqrt{5} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-0{,}5, \\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{-0{,}5;\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Решая это же уравнение другим способом, приведем его к виду

$$x^4+2x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}=0.$$

Делители свободного члена: $\pm\frac{1}{2}$; $\pm\frac{1}{4}$. Проверяя эти

числа, находим $x=-\frac{1}{2}$. Производя деление многочлена $x^4+2x^3+\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$ на $x+\frac{1}{2}$, в частном получим многочлен $x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$. Аналогично находим корень этого многочлена $x=-\frac{1}{2}$. Далее имеем

$$\left(x^3+\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2}\\ x^2+x-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{1}{2},\\ x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Решить уравнения:

5. $2x^3-3x^2-3x+2=0$. 6. $3x^3+8x^2-8x-8=0$.
7. $4x^3+8x^2+5x+3=0$.
8. $x^4-2x^3-7x^2+8x+12=0$.
9. $2x^4+7x^3+12x^2+13x+6=0$.
10. $6x^4-23x^3+x^2+5x-1=0$.
11. (6.013) $3\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=7\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
12. $2\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{2}+x^2$.

## § 2. Способ замены

Многие алгебраические уравнения приводятся к квадратным уравнениям либо к уравнениям высших степеней путем замены. Приведём несколько примеров.

13. (6.019) Решить уравнение $\frac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x-6=0$.

Решение. Рассмотрим равносильное уравнение

$$\frac{21}{x^2-4x+10}-(x^2-4x+6)=0.$$

Обозначим $x^2-4x+10=y$, тогда для нахождения $y$ получим уравнение

$$\left(\frac{21}{y}-(y-4)=0\right)\Leftrightarrow(y^2-4y-21=0,\ y\neq 0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=7,\\ y=-3.\end{array}\right.$$

Подставляя вместо $y$ его значения, имеем

$$(x^2-4x+10=7) \leftrightarrow (x^2-4x+3=0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=3, \\ x=1; \end{array}\right.$$

$$(x^2-4x+10=-3) \leftrightarrow (x^2-4x+13=0) \rightarrow (x \in \varnothing).$$

*Ответ:* $x \in \{1; 3\}$.

**14.** Решить уравнение $x^2+5-3\sqrt{2x^2-4x+5}=2x$.

Решение. Сделав очевидные преобразования, получим

$$x^2-2x+5-3\sqrt{2(x^2-2x)+5}=0.$$

Обозначим $\sqrt{2(x^2-2x)+5}=y$, тогда

$$(2(x^2-2x)+5=y^2) \leftrightarrow \left(x^2-2x=\frac{y^2-5}{2}\right).$$

Исходное уравнение принимает вид $\frac{y^2-5}{2}+5-3y=0$. Имеем

$$\left(\frac{y^2-5}{2}+5-3y=0\right) \leftrightarrow (y^2-6y+5=0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1, \\ y=5. \end{array}\right.$$

Далее решим такие два уравнения:

$$\left(x^2-2x=\frac{1-5}{2}\right) \leftrightarrow (x^2-2x=-2) \leftrightarrow (x \in \varnothing);$$

$$\left(x^2-2x=\frac{5^2-5}{2}\right) \leftrightarrow (x^2-2x=10) \leftrightarrow (x=1 \pm \sqrt{11}).$$

*Ответ:* $x \in \{1 \pm \sqrt{11}\}$.

*Уравнения вида*

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+k=0,$$

если выполнено условие $\frac{k}{a}=\left(\frac{d}{b}\right)^2$, $k \neq 0$, называются *возвратными*. Так как $x=0$ не является решением возвратного уравнения, то можно разделить обе части уравнения на $x^2$ и после соответствующей замены переменных получить квадратное уравнение. Приведём пример решения возвратного уравнения.

**15.** Решить уравнение $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $x^2$ и сгруппируем слагаемые:

$$2\left(x^2+\frac{25}{x^2}\right)-21\left(x+\frac{5}{x}\right)+74=0.$$

Введём обозначение $x+\frac{5}{x}=y$, тогда $x^2+\frac{25}{x^2}=y^2-10$. Имеем

$$(2(y^2-10)-21y+74=0)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=4{,}5,\\y=6.\end{array}\right.$$

Итак,

$$\left(x+\frac{5}{x}=4{,}5\right)\leftrightarrow(x^2-4{,}5x+5=0)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=2{,}5;\end{array}\right.$$

$$\left(x+\frac{5}{x}=6\right)\leftrightarrow(x^2-6x+5=0)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1,\\x=5.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{1;\ 2;\ 2{,}5;\ 5\}$.

*Уравнения вида*

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m,$$

если выполнено условие $a+b=c+d$, приводятся к квадратным.

**16.** Решить уравнение $(x-1)x(x+1)(x+2)=24$.

Решение. Произведя преобразования, получаем

$$(x^2+x)(x^2+x-2)=24.$$

Введём обозначение $x^2+x=y$, тогда

$$(y(y-2)=24)\leftrightarrow(y^2-2y-24=0)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=6,\\y=-4.\end{array}\right.$$

Следовательно, для нахождения $x$ решим совокупность двух уравнений

$$\left[\begin{array}{l}x^2+x=6,\\x^2+x=-4\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3,\\x=2,\\x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{-3;\ 2\}$.

Решить уравнения:

**17.** $x^4-x^3-10x^2+2x+4=0$,

**18.** $\frac{x^3}{3}+\frac{48}{x^3}=10\left(\frac{x}{3}-\frac{4}{x}\right)$.

**19.** $x(x-1)(x-2)(x-3)=15$.

**20.** $(x^2-2x)^2-2(x-1)^2+2=0$.

**21.** $(2x-1)(2x+3)(x+2)(x+4)+9=0$.

**22.** (6.005) $\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+2)}=\frac{7}{12}$.

**23.** $x^2+3x-1=\sqrt{2x^2+6x+1}$.

24. $2x + 2\sqrt{2x-1} = 16$.

25. (6.256) Решить уравнение $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Решение. Производим замену $x + 4 = t$, имеем

$$((t-1)^4 + (t+1)^4 = 16) \leftrightarrow (t^4 + 6t^2 - 7 = 0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t^2 = 1, \\ t^2 = -7. \end{array}\right.$$

Решая уравнение $(x+4)^2 = 1$, находим $x = -3$, $x = -5$. Уравнение $t^2 = -7$ не имеет действительных корней.

*Ответ:* $x \in \{-5; -3\}$.

*Уравнения вида*

$$\frac{ax}{px^2+nx+q} + \frac{bx}{px^2+mx+q} = c, \quad c \neq 0,$$

делением числителя и знаменателя каждой дроби на $x$ приводятся к виду $\dfrac{a}{px + \frac{q}{x} + n} + \dfrac{b}{px + \frac{q}{x} + m} = c$. Обозначая $px + \frac{q}{x} = y$, получим уравнение $\dfrac{a}{y+n} + \dfrac{b}{y+m} = c$, сводящееся к квадратному уравнению.

26. Решить уравнение $\dfrac{2x}{2x^2-5x+3} + \dfrac{13x}{2x^2+x+3} = 6$.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{2}{2x + \frac{3}{x} - 5} + \frac{13}{2x + \frac{3}{x} + 1} = 6\right) \leftrightarrow \left(\frac{2}{y-5} + \frac{13}{y+1} = 6\right),$$

где $2x + \frac{3}{x} = y$. Далее

$$(2y^2 - 13y + 11 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1, \\ y = 5{,}5. \end{array}\right.$$

Затем для нахождения $x$ решаем уравнения

$$\left(2x + \frac{3}{x} = 1\right) \Rightarrow (x \in \varnothing);$$

$$\left(2x + \frac{3}{x} = 5{,}5\right) \leftrightarrow (2x^2 - 5{,}5x + 3 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{4}, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{3}{4}; 2\right\}$.

27. Решить уравнение $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 1$.

Решение. Прибавим к обеим частям уравнения выражение $2x\left(\frac{x}{x-1}\right)$ и выполним преобразования:

$$\left(x^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+2x\left(\frac{x}{x-1}\right)=1+2x\left(\frac{x}{x-1}\right)\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\left(x+\frac{x}{x-1}\right)^2=1+\frac{2x^2}{x-1}\right)\leftrightarrow\left(\left(\frac{x^2}{x-1}\right)^2-2\frac{x^2}{x-1}=1\right).$$

Обозначим $\frac{x^2}{x-1}=y$, имеем $(y^2-2y-1=0)\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=1+\sqrt{2},\\ y=1-\sqrt{2}.\end{array}\right.$

Подставляя вместо $y$ его значения, находим $x$:

$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1+\sqrt{2}\right)\leftrightarrow(x^2-x(1+\sqrt{2})+1+\sqrt{2}=0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x\in\varnothing);$$
$$\left(\frac{x^2}{x-1}=1-\sqrt{2}\right)\leftrightarrow(x^2-x(1-\sqrt{2})+1-\sqrt{2}=0).$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}\right)\right\}$.

**28.** Решить уравнение $(6x+7)^2(3x+4)(x+1)=6$.

*Решение.* Выполняя очевидные преобразования, имеем

$$((6x+7)^2\,2(3x+4)\,6(x+1)=6\cdot 12)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow((6x+7)^2(6x+8)(6x+6)=72).$$

Произведём замену $6x+7=t$, получим

$$(t^2(t+1)(t-1)=72)\leftrightarrow(t^2(t^2-1))=72).$$

Обозначим $t^2=z$, тогда

$$(z(z-1)=72)\leftrightarrow(z^2-z-72=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}z=-8,\\ z=9.\end{array}\right.$$

Подставляя вместо $z$ его значения, получим $(t^2=9)\Rightarrow$ $\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=3,\\ t=-3;\end{array}\right.$ уравнение $t^2=-8$ не имеет действительных корней. Учитывая, что $t=6x+7$, для нахождения $x$ решаем уравнения:

$$(6x+7=3)\Rightarrow\left(x=-\frac{2}{3}\right);$$
$$(6x+7=-3)\Rightarrow\left(x=-\frac{5}{3}\right).$$

*Ответ:* $x\in\left\{-\frac{5}{3};\ -\frac{2}{3}\right\}$.

Решить уравнения:

**29.** $(x-2)(x+1)(x+4)(x+7)=19$.

**30.** $\sqrt[6]{x^5}+2\sqrt{x}=3\sqrt[4]{x^3}$.

31. $x^4 - 7x^3 + 8x^2 + 7x + 1 = 0$.

32. $x + \frac{2}{x} + \frac{x}{x^2+2} = \frac{10}{3}$. 33. $(x-0{,}5)^4 + (x+1{,}5)^4 = 82$.

34. $24x^3 - 10x^2 - 3x + 1 = 0$.

35. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x-6} = 0$.

36. $\frac{x^2-6x-7}{x} = \frac{x^2-7}{x^2-6x-7}$.

37. $x^2 + \frac{25x^2}{(x+5)^2} + 9 = \frac{20x^2}{x+5}$.

38. $\frac{4}{\sqrt[3]{x}+1} + \frac{\sqrt[3]{x}+4}{5} = 3$.

39. $\left(\frac{3+2x}{2-x}\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\frac{2-x}{3+2x}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$.

40. $(2x-1)^{\frac{1}{3}} - (1-2x)^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3}$.

41. $\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{1}{3}} + 2\left(1-\frac{5}{x+5}\right)^{\frac{1}{3}} = 3$.

42. $\frac{3x}{x^2+1-4x} - \frac{2x}{x^2+1+x} = \frac{8}{3}$.

43. $\frac{3x^2-1}{x} + \frac{5x}{3x^2-x-1} = \frac{119}{18}$. 44. $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$.

*Уравнения вида*

$$ay^{2\alpha} + by^{\alpha}z^{\alpha} + cz^{2\alpha} = 0, \qquad (9)$$

где $a$, $b$, $c$, $\alpha$ — заданные числа, отличные от нуля; $y$ и $z$ — некоторые функции от $x$ ($y = y(x)$; $z = z(x)$), называются *однородными*.

При решении уравнения (9) проверяем, будут ли корни уравнения $z(x) = 0$ корнями уравнения (9). Затем делим обе части уравнения (9) на $z^{2\alpha}$, имеем

$$a\left(\frac{y}{z}\right)^{2\alpha} + b\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha} + c = 0.$$

Обозначая $\left(\frac{y}{z}\right)^{\alpha} = t$, получаем квадратное уравнение относительно $t$.

Приведём примеры решения однородных уравнений.

**45.** Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x-3)^2}=\frac{5}{2}\sqrt[3]{(x-2)(x-3)}.$$

Решение. Так как $x=3$ не является корнем уравнения, то можно разделить обе части уравнения на $\sqrt[3]{(x-3)^2}$:

$$\sqrt[3]{\left(\frac{x-2}{x-3}\right)^2}+1=\frac{5}{2}\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}.$$

Обозначим $\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}=y$, имеем

$$\left(y^2+1=\frac{5}{2}y\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0{,}5,\\ y=2.\end{array}\right.$$

Подставив вместо $y$ его значения, получим

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}=2\right)\leftrightarrow\left(\frac{x-2}{x-3}=8\right)\Rightarrow\left(x=\frac{22}{7}\right),$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{x-2}{x-3}}=\frac{1}{2}\right)\leftrightarrow\left(\frac{x-2}{x-3}=\frac{1}{8}\right)\Rightarrow\left(x=\frac{13}{7}\right).$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{13}{7};\ \frac{22}{7}\right\}$.

**46.** Решить уравнение $3(x^2-x+1)^2-2(x+1)^2=5(x^3+1)$.

Решение. Так как $x=-1$ не является корнем уравнения, то разделим обе части уравнения на $(x+1)^2$:

$$\left(3\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)^2-2=5\frac{x^2+1}{(x+1)^2}\right)\leftrightarrow\left(3\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)^2-2=5\left(\frac{x^2-x+1}{x+1}\right)\right).$$

Обозначим $\frac{x^2-x+1}{x+1}=t$, имеем

$$(3t^2-5t-2=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\frac{1}{3},\\ t=2.\end{array}\right.$$

Подставляя вместо $t$ его значения, находим $x$:

$$\left[\begin{array}{l}\frac{x^2-x+1}{x+1}=2,\\ \frac{x^2-x+1}{x+1}=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+1=2x+2,\\ 3x^2-2x+4=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2},\\ x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Решить уравнения:

47. $(x+3)^4-(x^2+x-6)^2=2(x-2)^4$.

48. (6.271) $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1)$.

49. $2\sqrt[3]{x-3}+2\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{x^2-5x+6}$.

50. $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(1+x)$.

51. (6.147) $\frac{6}{(x+1)(x+2)}+\frac{8}{(x-1)(x+4)}=1$.

52. $(8x+7)^2(4x+3)(x+1)=4{,}5$.

53. $3x^2+2\sqrt{x^2+5x+1}=2-15x$.

54. (6.138) $(x^2-6x)^2-2(x-3)^2=81$.

55. (6.143) $x^{-2}+(x+2)^{-2}=\frac{10}{9}$.

56. $x^{-1}+2(x+1)^{-1}=3\sqrt[-2]{x(x+1)}$.

57. (6.163) $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}=22\sqrt[15]{x^7}$.

## § 3. Иррациональные уравнения

При решении уравнений, содержащих корни чётных степеней, предварительно находим область определения.

58. Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-2x}=\sqrt{2x-12}$.

Решение. Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 9-2x\geqslant 0, \\ 2x-12\geqslant 0, \end{cases}$$

находим область определения: $x\in\varnothing$. Следовательно, уравнение решений не имеет.

59. Решить уравнение $\sqrt{x+1}-\sqrt{9-x}=\sqrt{2x-12}$.

Решение. Решая систему неравенств

$$\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 9-x\geqslant 0, \\ 2x-12\geqslant 0, \end{cases}$$

находим область определения: $x\in[6;\ 9]$. Затем возводим в квадрат обе части уравнения:

$$(x+1-2\sqrt{x+1}\sqrt{9-x}+9-x=2x-12)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(2\sqrt{(x+1)(9-x)}=22-2x)\leftrightarrow((x+1)(9-x)=$$
$$=(11-x)^2)\rightarrow\left[\begin{array}{l} x=8, \\ x=7. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что оба корня являются решениями исходного уравнения.

*Ответ:* $x \in \{7;\ 8\}$.

**60.** (6.175) Решить уравнение $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

Решение. Возведём обе части уравнения в куб и преобразуем:

$$(x-1+x-2+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})=2x-3) \leftrightarrow (3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}(\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2})=0).$$

Так как по условию $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$, то имеем

$$(3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x-2}\sqrt[3]{2x-3}=0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ x-1=0, \\ 2x-3=0, \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=1, \\ x=1{,}5. \end{array}\right.$$

Следует отметить, что использование исходного уравнения в процессе преобразования, вообще говоря, не приводит к эквивалентным уравнениям, поэтому необходимо проверить полученные корни. Проверка подтверждает, что все корни удовлетворяют исходному уравнению.

*Ответ:* $x \in \{1;\ 1{,}5;\ 2\}$.

**61.** Решить уравнение $\sqrt{x+3}+1=\sqrt{3x-1}$.

Решение. Решая систему неравенств $\begin{cases} x+3 \geqslant 0, \\ 3x-1 \geqslant 0, \end{cases}$ находим область определения: $x \in \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right[$. Затем возводим обе части уравнения в квадрат и преобразуем:

$$(x+3+2\sqrt{x+3}+1=3x-1) \leftrightarrow (2\sqrt{x+3}=2x-5).$$

Необходимо, чтобы корни полученного уравнения удовлетворяли условию: $(2x-5 \geqslant 0) \leftrightarrow \left(x \geqslant \frac{5}{2}\right)$. Следовательно, корни исходного уравнения должны удовлетворять системе

$$\begin{cases} x \geqslant \frac{1}{3}, \\ x \geqslant 2{,}5 \end{cases} \leftrightarrow (x \geqslant 2{,}5). \qquad (10)$$

Возводим обе части уравнения $2\sqrt{x+3}=2x-5$ в квадрат, получим

$$(4x+12=4x^2-20x+25)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{6+\sqrt{23}}{2},\\ x=\frac{6-\sqrt{23}}{2}.\end{array}\right.$$

Так как значение $\frac{6-\sqrt{23}}{2}$ не удовлетворяет условию (10), то оно не является корнем уравнения.

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{6+\sqrt{23}}{2}\right\}$.

Решить уравнения:

62. $\sqrt[3]{2x+13}-\sqrt[3]{2x-13}=2.$

63. $\sqrt[3]{25+x}+\sqrt[3]{3-x}=4.$

64. $\frac{\sqrt{x^2+x+6}+\sqrt{x^2-x-4}}{\sqrt{x^2+x+6}-\sqrt{x^2-x-4}}=5.$

65. (6.289) $x^{\frac{4}{5}}-7x^{-\frac{2}{5}}+6x^{-1}=0.$

66. $\sqrt{20+x}+\sqrt{20-x}=\sqrt{6x}.$

67. $\sqrt[3]{5x+7}=1+\sqrt[3]{5x-12}.$

68. $\sqrt{4x+5}+\sqrt{10x+6}=\sqrt{24x+25}.$

69. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{x-1}.$

70. $\sqrt{4x^2-3x+15}+\sqrt{4x^2-3x+8}=7.$

71. $\sqrt{x^3-x^2+4}+\sqrt{x^3-x^2+1}=3.$

72. Решить уравнение

$$\sqrt{2x^2+5x-7}+\sqrt{3(x^2-7x+6)}=\sqrt{7x^2-6x-1}.$$

Решение. Разложим подкоренные выражения на множители:

$$\sqrt{2(x-1)(x+3{,}5)}+\sqrt{3(x-1)(x-6)}=$$
$$=\sqrt{7(x-1)\left(x+\tfrac{1}{7}\right)}.$$

Решая систему неравенств $\begin{cases}(x-1)(x+3{,}5)\geqslant 0,\\ (x-1)(x-6)\geqslant 0,\\ (x-1)\left(x+\frac{1}{7}\right)\geqslant 0,\end{cases}$ нахо-

дим область определения: $x \in \{1\} \cup [6; +\infty[ \cup ]-\infty; -3{,}5]$. Очевидно, $x = 1$ является корнем уравнения. Рассмотрим остальные случаи:

а) Пусть $x \geqslant 6$, тогда, сокращая обе части уравнения на общий множитель $\sqrt{x-1}$, имеем

$$\sqrt{2(x+3{,}5)} + \sqrt{3(x-6)} = \sqrt[6]{7\left(x+\frac{1}{7}\right)}.$$

Возводя в квадрат обе части уравнения и преобразуя, получаем квадратное уравнение

$$(5x^2 - 27x - 162 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -3{,}6. \end{array}\right.$$

Корень $x = -3{,}6$ является посторонним, так как он не удовлетворяет условию $x \geqslant 6$.

Пусть $x \leqslant -3{,}5$. Преобразуем обе части данного уравнения таким образом, чтобы подкоренные множители были положительными:

$$\sqrt{(1-x)(-2x-7)} + \sqrt{3(1-x)(6-x)} = \sqrt{(1-x)(-7x-1)}.$$

Сокращая на общий множитель $\sqrt{1-x}$, имеем

$$\sqrt{-2x-7} + \sqrt{3(6-x)} = \sqrt{-7x-1}.$$

Возведём в квадрат обе части этого уравнения и после преобразований получим

$$(5x^2 - 27x - 162 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = -3{,}6. \end{array}\right.$$

Оба корня являются посторонними, так как корень $x = 9$ не удовлетворяет условию $x \leqslant -3{,}5$, а корень $x = -3{,}6$ не удовлетворяет уравнению.

*Ответ:* $x \in \{1; 9\}$.

**73.** Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{2} - \frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}}{x^2} = \frac{x}{2}\sqrt[3]{\frac{x^3}{x+\sqrt{2}}}.$$

Решение. Преобразуем обе части уравнения

$$\left(\frac{\sqrt[3]{x-\sqrt{2}}\,(x^3-2)}{2x^2} = \frac{x\sqrt[3]{x^3}}{2\sqrt[3]{x+\sqrt{2}}}\right) \leftrightarrow (\sqrt[3]{x^3-2}\,(x^3-2) =$$

$$= x^3\sqrt[7]{x^3}) \Rightarrow \left((x^2-2)^{\frac{8}{7}} = (x^3)^{\frac{8}{7}}\right) \Rightarrow ((x^2-2)^8 = (x^3)^8) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-2=x^3, \\ x^2-2=-x^3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=1. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \{-1; 1\}$.

Решить уравнения:

74. $\sqrt[3]{24+x} + \sqrt{12-x} = 6.$

75. $\sqrt{6-x} + \sqrt{x-2} + 2\sqrt[4]{(6-x)(x-2)} = 2.$

76. $x^2 + 4x - 8\sqrt{8x} + 20 = 0.$

77. $\sqrt{x^{-2} - \frac{3}{4}} = x^{-1} - 0{,}5.$

78. $1 + \sqrt{1+x} = \sqrt{1-x^{-1}}.$

79. $\sqrt{3x^{-1}-1} + \sqrt{3^{-1}x+1} = \sqrt{6x^{-1}}.$

80. $\frac{\sqrt[5]{2-x}}{x^2} - \frac{\sqrt[5]{2-x}}{4} = \sqrt[5]{\frac{x^2}{2+x}}.$

81. $\sqrt{3x^2-2x+9} + \sqrt{6x^2-4x-5} = 7.$

82. $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-2} = 4x - 15 + 4\sqrt{x^2-4}.$

83. $\sqrt[4]{x+1} + \frac{\sqrt[4]{x+1}}{x} = \sqrt[4]{32x}.$

84. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{10-x^2}} = \frac{4}{3}.$

85. $\frac{\sqrt[5]{2+x}}{2} + \frac{\sqrt[5]{x+2}}{x} = \sqrt[5]{2x}.$

86. $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x-3} = 3x - 6 + 2\sqrt{2x^2-3x-9}.$

87. (6.288) $\frac{x^2}{\sqrt{2+3x}} + \sqrt{2+3x} = 2x.$

88. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{1-2x} = \frac{4x}{\sqrt{1-4x^2}}.$

89. $\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} = 2.$

90. $\sqrt{2x^2+5x+2} - \sqrt{x^2+x-2} = \sqrt{3x+6}.$

91. $\sqrt{2x^2-5x+2} - \sqrt{x^2-x-2} = \sqrt{x^2-3x+2}.$

92. (6.292) $(2x^2+8x+6)^{\frac{1}{2}} - 2(x+1) + \sqrt{x^2-1} = 0.$

93. $\sqrt{2x^2-9x+4} + 3\sqrt{2x-1} = \sqrt{2x^2+21x-11}.$

94. $\sqrt{2x^2+7x-15} + \sqrt{2x^2-3x} = 2\sqrt{4x^2+4x-15}.$

**95.** $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$.

**96.** $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

**97.** $\sqrt{\sqrt{28}+\sqrt{x}}-\sqrt{\sqrt{28}-\sqrt{x}}=\sqrt[4]{28}$.

**98.** $4\sqrt{2x+3}-4x=\dfrac{9-x^2}{\sqrt{2x+3}}$.

**99.** $\sqrt{9x^2+4x^{-2}}=\dfrac{3x^2+2x-2}{x}$.

## § 4. Уравнения с модулями

Для решения уравнений с модулями применяется метод промежутков, изложенный в главе I.

Рассмотрим примеры.

**100.** Решить уравнение $|x-2|+|x-3|+|2x-8|=9$.

*Решение.* Рассмотрим уравнение в следующих промежутках:

1) $x\leqslant 2$. Тогда $|x-2|=-(x-2)$, $|x-3|=-(x-3)$, $2x-8|=-(2x-8)$ и, следовательно,

$$(x-2+x-3+2x-8=-9)\leftrightarrow(4x=4)\leftrightarrow(x=1)$$

(найденное значение $x$ удовлетворяет условию $x\leqslant 2$ и является корнем уравнения);

2) $2<x\leqslant 3$. Тогда после аналогичных преобразований получим $x=0$ (этот корень вне данного промежутка);

3) $3<x\leqslant 4$. Тогда уравнение принимает вид $x-2+$ $+x-3-2x+8=9$, т. е. $x\in\varnothing$;

4) $x>4$. Имеем $(4x=22)\leftrightarrow(x=5{,}5)$.

*Ответ:* $x\in\{1;\ 5{,}5\}$.

**101.** Решить уравнение $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+$ $+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

Решение. Произведем замену $(\sqrt{x-1}=y)\rightarrow(x=y^2+1)$. Получаем

$$(\sqrt{y^2+4-4y}+\sqrt{y^2+9-6y}=1)\leftrightarrow(|y-2|+|y-3|=1).$$

Таким образом, иррациональное уравнение после преобразований превратилось в уравнение с модулями. Поскольку $y\geqslant 0$, рассмотрим уравнение в следующих промежутках:

1) $0\leqslant y\leqslant 2$. Тогда $|y-2|=2-y$, $|y-3|=3-y$ и, следовательно,

$$(2-y+3-y=1)\leftrightarrow(y=2);$$

2) $2 < y \leqslant 3$. Тогда $|y-2| = y-2$, $|y-3| = 3-y$ и

$$(y-2+3-y=1) \leftrightarrow (1=1),$$

уравнение обратилось в тождество, следовательно, все точки отрезка $]2; 3]$ являются решениями;

3) $y > 3$. Тогда $|y-2| = y-2$, $|y-3| = y-3$ и уравнение запишем в виде

$$(y-2+y-3=1) \Rightarrow (y=3).$$

Таким образом, решение уравнения можно записать в виде

$$(2 \leqslant y \leqslant 3) \Rightarrow (2 \leqslant \sqrt{x-1} \leqslant 3) \Rightarrow (4 \leqslant x-1 \leqslant 9) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (5 \leqslant x \leqslant 10).$$

*Ответ:* $x \in [5; 10]$.

Решить уравнения:

**102.** $\sqrt{x+\sqrt{14x-49}} + \sqrt{x-\sqrt{14x-49}} = \sqrt{14}$.

**103.** $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}} + \sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

**104.** $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}} + \sqrt{x+1-\sqrt{x+7}} = 4$.

**105.** $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x-1}} = x-1$.

**106.** $|2x-3| + |2x+3| = 14$.

**107.** $|2x-3| + |2x+3| = 6$.

**108.** $|1-2x| + |3x+2| + |x| = 5$.

**109.** $|2x-1| + |3x+2| + |x| = 3$.

**110.** $||x|-1| = 4+x$. **111.** $||x|-2| = 1$.

**112.** $|3-2|x|| = |2-x| - 3$.

**113.** $|x^2-2x-3| = |2x-5| + 1$.

**114.** $\sqrt{x+\sqrt{6x-9}} = \sqrt{6} - \sqrt{x-\sqrt{6x-9}}$.

**115.** $|2\sqrt{2|x|-1}-1| = 3$.

**116.** $|2x+3|-1 = |2x^2-x-1|$.

**117.** $|\sqrt{x}-3| = 1 + |\sqrt{5-x}-1|$.

ГЛАВА III

# ПРОГРЕССИИ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

*Числовая последовательность — это занумерованное множество чисел, расположенных в порядке возрастания номеров.*

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ считается *заданной*, если известно правило, по которому можно определить любой ее член $a_n$, $n \in N$.

*Арифметической прогрессией называется такая последовательность, у которой каждый ее член, начиная со второго, равен предшествующему члену, сложенному с одним и тем же числом d, которое называется разностью прогрессии.*

*Геометрической прогрессией называется такая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число q, называемое знаменателем прогрессии* ($q \neq 0$).

## Основные обозначения

$a_n$ — $n$-й член прогрессии ($n \in N$),
$S_n$ — сумма первых $n$ членов прогрессии,
$S$ — сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

## Основные формулы

Арифметическая прогрессия:

$$a_n = a_1 + d(n-1), \tag{1}$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2}, \tag{2}$$

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = 2, 3, 4, \ldots \tag{3}$$

Геометрическая прогрессия:

$$a_n = a_1 q^{n-1}, \tag{4}$$

$$S_n = \frac{a_n q - a_1}{q-1} = \frac{a_1(q^n - 1)}{q-1}, \tag{5}$$

$$a_k^2 = a_{k-1}\, a_{k+1}. \tag{6}$$

Если $|q| < 1$, то $S = \frac{a_1}{1-q}$. (7)

Решим несколько задач.

1. Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма любого числа членов, начиная с первого, в 4 раза больше квадрата числа членов.

Решение. Арифметическая прогрессия определяется двумя величинами ($a_1$ и $d$). По условию

$$(S_n = 4n^2) \Rightarrow (a_1 = S_1 = 4,\ S_2 = a_1 + a_2 = 4 \cdot 4 = 16).$$

Отсюда находим, что $a_2 = 16 - a_1 = 12$, но $a_2 = a_1 + d$. Следовательно, $d = 8$. Далее составляем прогрессию: 4; 12; 20; 28; ..., $4 + 8n$, .... Проверка подтверждает выполнение условия задачи.

*Ответ:* $a_1 = 4$, $d = 8$.

2. В арифметической прогрессии 11 членов; $a_1 = 24$; $a_1$, $a_5$ и $a_{11}$ составляют геометрическую прогрессию. Написать шесть первых членов арифметической прогрессии.

Решение. $a_5 = a_1 + 4d$; $a_{11} = a_1 + 10d$. Применяя (6), получим

$$((a_1 + 4d)^2 = (a_1 + 10d)\,a_1) \Leftrightarrow ((24 + 4d)^2 = (24 + 10d)\,24) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (d\,(d - 3) = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 0, \\ d = 3. \end{array}\right.$$

Таким образом, возможны два случая:

1) $a_1 = 24$, $d = 0$, получим ряд чисел 24, 24, 24, ..., 24;

2) $a_1 = 24$, $d = 3$, получим ряд чисел 24, 27, 30, 33, 36, 39.

3. Три числа составляют геометрическую прогрессию. Если второй член увеличить на 8, то данная прогрессия станет арифметической, но если затем третий член увеличить на 64, то она станет геометрической прогрессией. Найти эти числа.

Решение. Поскольку числа образуют геометрическую прогрессию, то их можно записать в следующем виде: $a$, $aq$, $aq^2$. Из условия получаем такие данные:

$a$, $aq + 8$, $aq^2$ — арифметическая прогрессия;
$a$, $aq + 8$, $aq^2 + 64$ — геометрическая прогрессия.

Используя свойства (3) и (6) прогрессий, получим

$$\left\{\begin{array}{l} aq + 8 = \dfrac{aq^2 + a}{2}, \\ (aq + 8)^2 = a(aq^2 + 64) \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a\,(q^2 - 2q + 1) = 16, \\ a\,(4 - q) = 4. \end{array}\right.$$

Произведя деление обеих частей полученных уравнений, получим

$$\left(\frac{q^2-2q+1}{4-q}=4\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}q=3,\\ q=-5.\end{array}\right.$$

Подставив полученные значения $q$ во второе уравнение системы, находим $a_1=4$ или $a_1=\frac{4}{9}$.

*Ответ:* 4; 12; 36 или $\frac{4}{9}$; $-\frac{20}{9}$; $\frac{100}{9}$.

4. Найти $a_1$ и $q$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $S=9$, а сумма квадратов ее членов равна 40,5.

Решение. Рассмотрим сумму квадратов

$$a_1^2+a_1^2q^2+a_1^2q^4+\ldots.$$

Очевидно, это сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой первый член $a_1^2$, а знаменатель $q^2$. Используя свойство (7), получим

$$\left\{\begin{array}{l}\frac{a_1^2}{1-q^2}=40{,}5,\\ \frac{a_1}{1-q}=9\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a_1=9(1-q),\\ a_1^2=40{,}5(1-q^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_1=9(1-q),\\ 81(1-q)^2=40{,}5(1-q^2)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a_1=9(1-q),\\ \left[\begin{array}{l}q=1,\\ q=\frac{1}{3}.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Значение $q=1$ не удовлетворяет условию задачи.

*Ответ:* $q=\frac{1}{3}$; $a_1=6$.

5. Найти сумму

$$A=\frac{1}{2\cdot5}+\frac{1}{5\cdot8}+\frac{1}{8\cdot11}+\ldots+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}.$$

Решение. Представим каждое слагаемое в виде разности

$$\frac{1}{2\cdot5}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right),\ \frac{1}{5\cdot8}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right),\ldots,$$

$$\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-1}-\frac{1}{3n+2}\right).$$

Здесь мы использовали очевидное равенство

$$\frac{1}{k(n+k)} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+k}\right).$$

Подставляя в $A$, получим

$$A = \frac{1}{3}\left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{11}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2}\right)\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2}\right),$$

так как все слагаемые, кроме первого и последнего, уничтожаются. Далее имеем

$$A = \frac{1}{3} \cdot \frac{3n}{2(3n+2)} = \frac{n}{2(3n+2)}.$$

*Ответ:* $A = \frac{n}{2(3n+2)}$.

**6.** Найти сумму

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n}.$$

**7.** Найти сумму

$$\frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

**8.** Найти третий член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, сумма которой равна $\frac{8}{5}$, а второй член равен $-\frac{1}{2}$.

**9.** Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвертого ее членов равно 160. Найти сумму шести членов прогрессии.

**10.** Четыре числа образуют геометрическую прогрессию. Если к двум первым прибавить по 1, а к третьему и четвертому числам прибавить соответственно 4 и 13, то полученные числа образуют арифметическую прогрессию. Найти эти числа.

**11.** (4.015) Решить уравнение $\frac{1}{x} + x + x^2 + \ldots = \frac{7}{2}$, где $|x| < 1$.

12. Найти четыре числа, первые три из которых составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних равна 12.

13. (4. 023) Решить уравнение $2x + 1 + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots = \frac{13}{6}$, где $|x| < 1$.

14. Найти геометрическую прогрессию, у которой сумма первых трех членов равна 26, а сумма их квадратов равна 364.

15. Число членов геометрической прогрессии четное. Сумма всех ее членов в 5 раз больше суммы членов, стоящих на нечетных местах. Найти знаменатель прогрессии.

16. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 0,6, а сумма ее первых четырех членов равна $\frac{13}{27}$. Найти первый член и знаменатель прогрессии.

17. Найти четыре числа, образующие знакочередующуюся геометрическую прогрессию, у которой второй член меньше первого на 35, а третий больше четвертого на 560.

18. (4. 050) Найти сумму всех трехзначных чисел, делящихся на 7.

19. (4. 068) Найти сумму первых девятнадцати членов арифметической прогрессии $a_1, a_2, a_3, \ldots$, если известно, что $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$.

20. (4 070) Найти сумму первых четырех членов геометрической прогрессии, обладающей тем свойством, что ее первые три члена, сумма которых равна $16\frac{4}{9}$, являются одновременно первым, четвертым и восьмым членами некоторой арифметической прогрессии.

21. (4.071) Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию. Доказать, что

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \ldots + \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{n}{a_1 a_{n+1}}.$$

22. (4. 074) Сумма четырех чисел, составляющих геометрическую прогрессию, равна —40, а сумма их квадратов равна 3280. Найти эти числа.

ГЛАВА IV

# ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. Основные формулы и определения

*Логарифмом положительного числа $y$ при основании $a$ ($a>0$, $a\neq 1$) называется показатель степени $x$, в которую нужно возвести $a$, чтобы получить $y$*

$$(\log_a y = x) \leftrightarrow (a^x = y). \tag{1}$$

Равенство (1), выражающее определение логарифма, можно переписать в виде

$$a^{\log_a y} = y. \tag{2}$$

Это равенство называется *основным логарифмическим тождеством.*

Если $y>0$, $z>0$, то

$$\log_a (yz) = \log_a y + \log_a z, \tag{3}$$

$$\log_a \left(\frac{y}{z}\right) = \log_a y - \log_a z, \tag{4}$$

$$\log_a y^k = k \log_a y, \tag{5}$$

$$\log_a y = \frac{\log_c y}{\log_c a} \tag{6}$$

(формула перехода от логарифмов по основанию $a$ к логарифмам по основанию $c$ ($c\neq 1$, $c>0$)),

$$\log_a y = \frac{1}{\log_y a}, \quad y\neq 1, \tag{7}$$

$$\log_a 1 = 0, \tag{8}$$

$$a^x b^x = (ab)^x, \tag{9}$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x. \tag{10}$$

## § 2. Общие свойства логарифмов

Выведем еще одну формулу, которая является следствием формул (5) и (6):

$$\log_{a^k} y^k = \log_a y. \tag{11}$$

Для этого приведем $\log_{a^k} y^k$ к основанию $a$:

$$\log_{a^k} y^k = \frac{\log_a y^k}{\log_a a^k} = \frac{k \log_a y}{k \log_a a} = \frac{\log_a y}{\log_a a}.$$

Учитывая, что $\log_a a = 1$, получаем $\log_{a^k} y^k = \log_a y$, что требовалось доказать.

**1.** (7.001) Упростить

$$\sqrt{\sqrt[\log_5 5]{25} + \sqrt[\log_7 7]{49}}.$$

Решение. Преобразуем первое слагаемое под радикалом, применяя последовательно формулы (7), (11), (2):

$$\sqrt[\log_5 5]{25} = 25^{\frac{1}{\log_5 5}} = 25^{\log_5 6} = 25^{\log_{25} 36} = 36.$$

Аналогичным образом преобразуем второе слагаемое под радикалом

$$\sqrt[\log_7 7]{49} = 49^{\frac{1}{\log_7 7}} = 49^{\log_7 8} = 49^{\log_{49} 64} = 64.$$

Окончательно имеем $\sqrt{36 + 64} = 10$.

*Ответ:* 10.

**2.** Доказать, что $3^{\log_3^2 x} = x^{\log_3 x}$, если $x > 0$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства

$$3^{(\log_3 x)^2} = (3^{\log_3 x})^{\log_3 x}.$$

Так как $3^{\log_3 x} = x$, то имеем $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} = x^{\log_3 x}$, что и требовалось доказать.

**3.** Вычислить без таблиц

$$x = 10^{1-\log_{100} 4} + 7^{2-\log_{49} 100}.$$

Решение.

$$x = \frac{10^1}{10^{\log_{100} 4}} + \frac{7^2}{7^{\log_{49} 100}} = \frac{10}{10^{\log_{10^2} 2}} + \frac{49}{7^{\log_7 10}} = \frac{10}{2} + \frac{49}{10} = 9{,}9.$$

*Ответ:* $x = 9{,}9$.

**4.** Доказать, что

$$a^{\log_c b} = b^{\log_c a},$$

где $a$, $b$, $c$ — положительные числа, $c \neq 1$.

Решение. Рассмотрим равносильные равенства

$$(\log_c b \log_c a = \log_c a \log_c b) \leftrightarrow (\log_c (a^{\log_c b}) = \log_c (b^{\log_c a})) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (a^{\log_c b} = b^{\log_c a}).$$

Упростить:

5. $81^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\log_9 4} \cdot 49^{\log_7 2}$. 6. $\log_2 \log_2 \sqrt[4]{\sqrt[4]{2}}$.

7. $((\log_a b + \log_b a + 2)\log_a b)^{\frac{1}{2}} : \log_a (ab)$.

8. $(\sqrt[\log_x 4]{4} + 4^{\log_{16} x} + 1)(x^{\log_4 2} - 1)$.

9. $8^{2-2\log_4 \sqrt[3]{3}} + \frac{1}{3} \cdot 7^{\log_{49} 4}$.

10. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_{1023} 1024$.

## § 3. Приведение к одному основанию

При решении некоторых показательных уравнений путем преобразований удается привести их к виду

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)};\ a > 0,\ a \neq 1,$$

откуда $f(x) = \varphi(x)$.

11. (7.055) Решить уравнение

$$8^{\frac{x-3}{3x-7}} \sqrt[3]{\sqrt[x-1]{0{,}5^{3x-1}}} = 1.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения

$$8^{\frac{x-3}{3x-7}} = (2^3)^{\frac{x-3}{3x-7}} = 2^{\frac{3x-9}{3x-7}},$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[x-1]{0{,}5^{3x-1}}} = (0{,}5)^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = (2^{-1})^{\frac{3x-1}{3(x-1)}} = 2^{\frac{1-3x}{3(x-1)}}.$$

Тогда запишем

$$\left(2^{\frac{3x-9}{3x-7}} \cdot 2^{\frac{1-3x}{3(x-1)}} = 1\right) \leftrightarrow \left(2^{\frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3(x-1)}} = 2^0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{3x-9}{3x-7} + \frac{1-3x}{3(x-1)} = 0\right) \Rightarrow \left(x = \frac{5}{3}\right).$$

При решении уравнений вида

$$f(x)^{\varphi_1(x)} = f(x)^{\varphi_2(x)} \qquad (12)$$

рассмотрим три случая:

а) если $f(x) = 1$, то обе части (12) равны при любых $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$;

б) если $f(x) \neq 1$, $f(x) > 0$, то получаем уравнение

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x);$$

если $f(x)=0$, то (12) выполняется при $\varphi_1(x)>0$, $\varphi_2(x)>0$.

12. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}}=\sqrt[3]{(x-3)^{x-2}}.$$

Решение. Выполняя преобразования, имеем

$$\left((x-3)^{\frac{x+1}{4}}=(x-3)^{\frac{x-2}{3}}\right)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x+1}{4}=\frac{x-2}{3},\\ x-3=1,\\ x-3=0,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=11,\\ x=4,\\ x=3.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{3;\ 4;\ 11\}$.

13. (7.074) Решить уравнение $9^{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}=5^{\log_{\frac{1}{5}}(2x^2+1)}$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$(9^{\log_{3^{-1}}(x+1)}=5^{\log_{5^{-1}}(2x^2+1)})\Leftrightarrow(9^{\log_3(x+1)^{-1}}=$$

$$=5^{\log_5(2x^2+1)^{-1}})\Leftrightarrow((x+1)^{-2}=(2x^2+1)^{-1})\Leftrightarrow((x+1)^2=$$

$$=2x^2+1)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{0;\ 2\}$.

14. (7.179) Решить уравнение

$$20\log_{4x}\sqrt{x}+7\log_{16x}x^3-3\log_{\frac{x}{2}}x^2=0.$$

Решение. Приводим все логарифмы к основанию 2, применяя формулу перехода к другому основанию:

$$\frac{20\log_2\sqrt{x}}{\log_2 4x}+\frac{7\log_2 x^3}{\log_2 16x}-\frac{3\log_2 x^2}{\log_2\frac{x}{2}}=0.$$

Учитывая, что $\log_2\sqrt{x}=\frac{1}{2}\log_2 x$, получим

$$\frac{10\log_2 x}{\log_2 4+\log_2 x}+\frac{21\log_2 x}{\log_2 16+\log_2 x}-\frac{6\log_2 x}{\log_2 x-\log_2 2}=0.$$

Введем подстановку $\log_2 x=y$. Уравнение примет вид

$$\left(\frac{10y}{2+y}+\frac{21y}{4+y}-\frac{6y}{y-1}=0\right)\Rightarrow(y(25y^2+15y-130)=0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=0,\\ y=2,\\ y=-2{,}6.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{1;\ 4;\ 2^{-2{,}6}\}$.

**15.** (7.020) Решить уравнение $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$.

Решение. Выполним преобразования, перенося логарифмы в одну часть уравнения:

$$(\log_5 2^3 - \log_5(3^x - 5^{2-x}) = x - 2) \leftrightarrow \left(\log_5 \frac{8}{3^x - 5^{2-x}} = x - 2\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(5^{x-2} = \frac{8}{3^x - 5^{2-x}}\right) \leftrightarrow (5^{x-2} \cdot 3^x - 5^{x-2} \cdot 5^{2-x} = 8) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{5^x \cdot 3^x}{5^2} - 1 = 8\right) \leftrightarrow (15^x = 9 \cdot 5^2) \leftrightarrow (15^x = 15^2) \leftrightarrow (x = 2).$$

*Ответ:* $x \in \{2\}$.

**16.** Решить уравнение $1 + \log_x \frac{4-x}{10} = (\lg\lg a - 1) \times \log_x 10$.

Решение. Находим область определения: $x > 0$, $x \neq 1$, $\lg a > 0$. Выполним преобразования правой части уравнения:

$$(\lg\lg a - 1)\log_x 10 = (\lg\lg a - \lg 10)\log_x 10 = \lg\left(\frac{\lg a}{10}\right)\log_x 10 =$$

$$= \log_x\left(10^{\lg\left(\frac{\lg a}{10}\right)}\right) = \log_x\left(\frac{\lg a}{10}\right).$$

Исходное уравнение принимает вид

$$\left(1 + \log_x \frac{4-x}{10} = \log_x\left(\frac{\lg a}{10}\right)\right) \leftrightarrow \left(\log_x\left(\frac{\lg a}{10}\right) - \log_x\left(\frac{4-x}{10}\right) =\right.$$

$$\left. = 1\right) \leftrightarrow \left(\log_x\left(\frac{\lg a}{4-x}\right) = 1\right) \Rightarrow \left(\frac{\lg a}{4-x} = x\right) \leftrightarrow (x(4-x) = \lg a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x = 2 \pm \sqrt{4 - \lg a}),\ 0 < \lg a < 4.$$

*Ответ:* $x \in \{2 \pm \sqrt{4 - \lg a}\},\ 0 < \lg a < 4.$

**17.** Решить уравнение $3^x \sqrt[x+1]{8^x} = 36$.

Решение. Выполним преобразования обеих частей уравнения:

$$3^x \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}} = 3^2 \cdot 2^2.$$

Разделим обе части уравнения на $3^2 \cdot 2^{\frac{3x}{x+1}}$, получим

$$\left(3^{x-2}=2^{2-\frac{3x}{x+1}}\right)\leftrightarrow\left(3^{x-2}=2^{\frac{2-x}{x+1}}\right)\leftrightarrow\left(3^{x-2}=\left(2^{-\frac{1}{x+1}}\right)^{x-2}\right)\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x-2=0,\\ 3=2^{-\frac{1}{x+1}}\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ -\frac{1}{x+1}=\log_2 3\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\ x+1=-\log_3 2.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{2;\ -(1+\log_3 2)\}$.

Решить уравнения:

**18.** $\log_x(9x^2)(\log_3 x)^2=4$.

**19.** $1+\frac{\log_8(10-4x)}{\log_8 4x}=\frac{2}{1+\log_4 x}$.

**20.** $\sqrt[x]{3^{5\sqrt{x}}}=3^{\sqrt{x}-4}$.

**21.** $\sqrt{8^x\sqrt[3]{64^x\cdot\sqrt[x]{0{,}5}}}=2\sqrt[3]{16}$.

**22.** $2\log_4 x+3\log_x 4=5$.

**23.** $\log_{\sqrt{x}}4\cdot\log_2\sqrt[4]{\frac{16}{8-x}}=1$.

**24.** $2x^2=(2x+5)\log_x 4\cdot\log_8 x$.

**25.** $\sqrt[x-4]{5^{\frac{x}{2+\sqrt{x}}}\cdot 0{,}2^{\frac{4}{2+\sqrt{x}}}}=125\cdot 0{,}04^{\frac{x-2}{x-4}}$.

**26.** $\log_4(x+12)\log_x 2=1$. **27.** $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=100$.

**28.** $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2-1}\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^{5x}=\left(\frac{8}{343}\right)^{\frac{4}{3}}$.

**29.** $\log_{\frac{x}{4}}2x-\log_{4x}\frac{x}{\sqrt{2}}=-\frac{13}{4}\log_8 4$.

**30.** $\log_{9x}27-\log_{3x}3+\log_9 243=0$.

**31.** $\sqrt[x]{\frac{9}{4}}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{x-4}=\log_4^2 8$.

**32.** $(x^2-x-1)^{x^2-1}=(x-3)^{x^2-1}$.

**33.** $\log_{2x-7}(x^2-4x+20)\cdot\log_x(2x-7)=2$.

**34.** $(x+2)^{x^2}=(x+2)^{x+1}$. **35.** $\log_x 3-\log_x 4=2$.

**36.** $\log_{25}^2 x^2=\log_5 x\cdot\log_{\sqrt{5}}(\sqrt{x+5}-1)$.

**37.** $\log_8 8^{x-2}\cdot\log_4 27=x+3$.

**38.** $\log_x 2\cdot\log_{2x}2=\log_{8x}2$.

**39.** $(0{,}5)^{x^2}\cdot 2^{2x+3}=\frac{1}{8}$. **40.** $6^{2x+1}=2^{3x}\cdot 3^{x+2}$.

## § 4. Способ замены

**41.** (7.019) Решить уравнение $\left(1+\frac{1}{2x}\right)\lg 3+\lg 2=\lg(27-\sqrt[x]{3})$.

Решение. Выполним преобразования

$$\left(\lg\left(3^{1+\frac{1}{2x}}\cdot 2\right)=\lg\left(27-3^{\frac{1}{x}}\right)\right)\Rightarrow\left(3\cdot 3^{\frac{1}{2x}}\cdot 2=27-3^{\frac{1}{x}}\right).$$

Далее, сделав замену $3^{\frac{1}{2x}}=y$, получим

$$(y^3+6y-27=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=3,\\y=-9\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}3^{\frac{1}{2x}}=3,\\3^{\frac{1}{2x}}=-9\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2x}=1,\\x\in\varnothing\end{array}\right.\Rightarrow\left(x=\frac{1}{2}\right).$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

**42.** Решить уравнение $\lg^2 x^3-20\lg\sqrt{x}+1=0$.

Решение. Сделаем преобразование $\lg^2 x^3=(3\lg x)^2$, тогда

$$(9(\lg x)^2-10\lg x+1=0)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lg x=y,\\9y^2-10y+1=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lg x=y,\\\left[\begin{array}{l}y=1,\\y=\frac{1}{9}\end{array}\right.\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=10,\\x=\sqrt[9]{10}\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{10;\sqrt[9]{10}\right\}$.

**43.** Решить уравнение $\log^2_{\frac{1}{2}}4x+\log_{\frac{x^2}{8}}=8$.

Решение. Выполним преобразования

$$\log^2_{\frac{1}{2}}4x=(\log_{\frac{1}{2}}4x)^2=\left(\frac{\log_2 4x}{\log_2\frac{1}{2}}\right)^2=(2+\log_2 x)^2.$$

Далее имеем

$$((2+\log_2 x)^2+\log_2 x^2-\log_2 8=8)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}\log_2 x=y,\\(2+y)^2+3y-3=8\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\log_2 x=y,\\y=\frac{1}{2}(-7\pm\sqrt{77})\end{cases}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(x=2^{0,5(-7\pm\sqrt{77})}).$$

*Ответ:* $x\in\{2^{0,5(-7\pm\sqrt{77})}\}$.

**44.** Решить уравнение $33\cdot 2^{x-1}-4^{x+1}=2$.

Решение. Выполним преобразования

$$33\cdot\frac{2^x}{2}-4^x\cdot 4=2\Big)\leftrightarrow\begin{cases}2^x=y,\\\frac{33}{2}y-4y^2=2\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}2^x=y,\\\left[\begin{array}{l}y=4,\\y=\frac{1}{8}\end{array}\right.\end{cases}\rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-3.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{-3;\ 2\}$.

**45.** Решить уравнение $(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}})^x+(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}})^x=2{,}5$.

Решение. Так как $(3-\sqrt{8})(3+\sqrt{8})=9-8=1$, то $3-\sqrt{8}=\frac{1}{3+\sqrt{8}}$. Произведем подстановку $(3+\sqrt{8})^{\frac{x}{3}}=y$, тогда

$$(3-\sqrt{8})^{\frac{x}{3}}=\left(\frac{1}{3+\sqrt{8}}\right)^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{y}.$$

Далее решаем уравнение

$$\left(y+\frac{1}{y}=2{,}5\right)\rightarrow\left[\begin{array}{l}y=2,\\y=\frac{1}{2}\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}(3+\sqrt{8})^{\frac{x}{3}}=2,\\(3+\sqrt{8})^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\rightarrow$$

$$\rightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{x}{3}=\log_{3+\sqrt{8}}2,\\\frac{x}{3}=\log_{3+\sqrt{8}}\frac{1}{2}.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{3\log_{3+\sqrt{8}}2;\ 3\log_{3+\sqrt{8}}\frac{1}{2}\right\}$.

**46. (7.047)** Решить уравнение $\lg(\lg x)+\lg(\lg x^3-2)=0$.

Решение. Область определения находим, решая систему неравенств:

$$\begin{cases}\lg x>0,\\ \lg x^3-2>0\end{cases}\Rightarrow\left(\lg x>\frac{2}{3}\right).$$

Выполним преобразования исходного уравнения

$$(\lg(\lg x)+\lg(3\lg x-2)=0)\leftrightarrow(\lg(\lg x(3\lg x-2))=$$
$$=0)\leftrightarrow(\lg x(3\lg x-2)=1)\leftrightarrow\begin{cases}\lg x=y,\\ y(3y-2)=1\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}\lg x=y,\\ \left[\begin{array}{l}y=1,\\ y=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Так как корень $y=-\frac{1}{3}$ не входит в область определения, то имеем

$$(\lg x=1)\leftrightarrow(x=10).$$

*Ответ:* $x\in\{10\}$.

**47.** Решить уравнение $a^{\log_{\sqrt{6}}x}-5x^{\log_6 a}+6=0$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Решение. Преобразуем $\log_{\sqrt{6}}x=\log_6 x^2=2\log_6 x$. Далее имеем

$$a^{2\log_6 x}-5x^{\log_6 a}+6=0.$$

Так как $x^{\log_6 a}=a^{\log_6 x}$ (см. пример 4 этой главы), то имеем

$$(a^{2\log_6 x}-5a^{\log_6 x}+6=0)\leftrightarrow\begin{cases}a^{\log_6 x}=y,\\ y^2-5y+6=0\end{cases}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\begin{cases}a^{\log_6 x}=y,\\ \left[\begin{array}{l}y=2,\\ y=3\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow(x=6^{\log_a 2}\text{ или }x=6^{\log_a 3}).$$

**48.** Решить уравнение $\log_5(5^x-2)\log_5(5^{x+1}-10)=6$.

Решение. Выполним преобразования

$$\log_5(5^{x+1}-10)=\log_5(5(5^x-2))=1+\log_5(5^x-2).$$

Далее получаем равносильные уравнения

$$(\log_5(5^x-2)(1+\log_5(5^x-2))=6) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} \log_5(5^x-2)=y, \\ y(y+1)=6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \log_5(5^x-2)=y, \\ \left[\begin{array}{l} y=2, \\ y=-3 \end{array}\right. \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x-2=5^2, \\ 5^x-2=5^{-3} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^x=27, \\ 5^x=2{,}008 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_5 27, \\ x=\log_5 2{,}008. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \{\log_5 27;\ \log_5 2{,}008\}$.

Решить уравнения:

**49.** $\sqrt{\log_x \sqrt{5x}} = -\log_x 5$. **50.** $5^{1+\log_4 x} + 5^{\log_{\frac{1}{4}} x - 1} = \frac{26}{5}$.

**51.** $\log_{49} x^2 + \log_7(x-1) = \log_7(\log_{\sqrt{3}} 3)$.

**52.** $\log_x 3 \cdot \log_{3x} 3 = \frac{1}{6}$. **53.** $9^{x+1} - 3 \cdot 3^{x+3} - 27 \cdot 3^{x-2} + 27 = 0$.

**54.** $\log_2(\lg x + 2\sqrt{\lg x} + 1) - 2\log_4(\sqrt{\lg x} + 1) = 1$.

**55.** $3^{1-x} - 3^{1+x} + 9^x + 9^{-x} = 6$. **56.** $4^{x+3} - (0{,}25)^{x+1} = 15$.

**57.** $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{101}{10(2-\sqrt{3})}$.

**58.** $(1+\sqrt{3})^x + 2^{x-1}(2+\sqrt{3})^x = 4$.

**59.** $\lg(3^x-4) + \lg 2 = \frac{x}{2}\lg\frac{1}{9} + \lg 2{,}5$.

**60.** $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$. **61.** $\log_x 5\sqrt{5} - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$.

**62.** $\lg(10x) \cdot \lg(0{,}1x) = \lg x^3 - 3$.

**63.** $\log_2(12-2^x) = 5-x$.

**64.** $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x - \left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = 1{,}5$.

**65.** $\log_x(125x) \cdot \log_{25}^2 x = 1$. **66.** $\log_2 x \cdot \log_{2x} 4x = 1{,}5$.

**67.** $\log_2(16x) \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 2\log_x(4x^3)$.

**68.** $\sqrt{\log_x(3x)} \cdot \log_3 x + \sqrt{2} = 0$.

**69.** $\log_6(2^{\sqrt{x}+1} - 3) = \log_6 2 - \frac{\sqrt{x}}{2}\log_6 4$.

**70.** $15^{\log_3 3} \cdot x^{\log_6(9x)+1} = 1$.

## § 5. Группировка и логарифмирование

**71.** Решить уравнение

$$3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

Решение. Выполним преобразования

$$\left(3 \cdot 4^x - 6 \cdot 4^x \cdot 4 = -\frac{1}{3} \cdot 9^x \cdot 9^2 - \frac{1}{2} \cdot 9^x \cdot 9\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(4^x(3-24) = 9^x\left(-27-\frac{9}{2}\right)\right) \leftrightarrow \left(4^x \cdot 21 = 9^x \cdot \frac{63}{2}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(4^x = 9^x \cdot \frac{3}{2}\right).$$

Разделив обе части уравнения на $9^x$, получим

$$\left(\frac{4^x}{9^x} = \frac{3}{2}\right) \leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{9}\right)^x = \frac{3}{2}\right) \leftrightarrow \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2x = -1) \leftrightarrow \left(x = -\frac{1}{2}\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

**72.** Решить уравнение $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$.

Решение. Логарифмируем обе части уравнения по основанию 4:

$$(\log_4 (x^{\log_4 x - 2}) = \log_4 (2^{3(\log_4 x - 1)})) \leftrightarrow ((\log_4 x - 2)\log_4 x = 3(\log_4 x - 1)\log_4 2).$$

Обозначим $\log_4 x = y$, тогда, учитывая, что $\log_4 2 = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$\left((y-2)y = 3(y-1)\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4^3, \\ x = 4^{\frac{1}{2}} \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 64; \\ x = 2. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \{2; 64\}$.

**73.** Решить уравнение $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

Решение. Логарифмируем обе части уравнения по основанию 10, имеем $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$. Разделим обе части уравнения на $5^x \lg 5$, получим

$$\left(\frac{7^x}{5^x} = \frac{\lg 7}{\lg 5}\right) \leftrightarrow \left(\left(\frac{7}{5}\right)^x = \frac{\lg 7}{\lg 5}\right) \leftrightarrow \left(\left(\frac{7}{5}\right)^x = \log_5 7\right).$$

Отсюда находим $x$, логарифмируя обе части уравнения по основанию $\frac{7}{5}$:

$$x = \log_{\frac{7}{5}} (\log_5 7).$$

*Ответ:* $x \in \{\log_{\frac{7}{5}} (\log_5 7)\}$.

**74.** Решить уравнение $x^6 \cdot 5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 11^{-\log_5 \sqrt{11}\, 5}$.

Решение. Используя формулу (11), преобразуем правую часть уравнения

$$11^{-\log_5 \sqrt{11}\, 5} = 11^{-\log_{11} 5^5} = 11^{\log_{11} 5^{-5}} = 5^{-5}.$$

Получаем эквивалентное уравнение $x^6 \cdot 5^{\log_{\frac{1}{x}} 5} = 5^{-5}$. Прологарифмируем обе части этого уравнения по основанию $x$:

$$(\log_x (x^6 \cdot 5^{\log_{\frac{1}{x}} 5}) = \log_x 5^{-5}) \rightarrow (\log_x x^6 + \log_x (5^{\log_{\frac{1}{x}} 5}) =$$
$$= -5 \log_x 5) \rightarrow (6 + \log_{\frac{1}{x}} 5 \cdot \log_x 5 = -5 \log_x 5).$$

Так как $\log_{\frac{1}{x}} 5 = \log_x 5^{-1} = -\log_x 5$, то имеем

$$(6 - (\log_x 5)^2 = -5 \log_x 5) \leftrightarrow \begin{cases} \log_x 5 = y, \\ 6 - y^2 = -5y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^y = 5, \\ \left[\begin{array}{l} y = 6, \\ y = -1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^6 = 5, \\ x^{-1} = 5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt[6]{5}, \\ x = 5^{-1}. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \{5^{-1}; \sqrt[6]{5}\}$.

Решить уравнения:

**75.** $3^{2-\log_3 x} = 81x$. **76.** $x^{2-0{,}5 \lg x} = 100$.

**77.** (7.050) $7^{\lg x} - 5^{\lg x + 1} = 3 \cdot 5^{\lg x - 1} - 13 \cdot 7^{\lg x - 1}$.

78. $\sqrt{x^{\lg\sqrt{x}}} = 10$.

79. $4^{\log_{16}x} - 3^{\log_{16}x-\frac{1}{2}} = 3^{\log_{16}x+\frac{1}{2}} - 2^{2\log_{16}x-1}$.

80. $27x^{\log_{27}x} = x^{\frac{10}{3}}$.

## § 6. Однородные уравнения

81. Решить уравнение $4^x - 14^x \cdot 2 = 3 \cdot 49^x$.

Решение. Разделим обе части уравнения на $4^x$:

$$\left(1 - 2 \cdot \left(\frac{14}{4}\right)^x = 3 \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^x\right) \leftrightarrow \left(1 - 2\left(\frac{7}{2}\right)^x = 3\left(\frac{49}{4}\right)^x\right).$$

Обозначим $\left(\frac{7}{2}\right)^x = y$, тогда

$$(1 - 2y = 3y^2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{3}, \\ y = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{7}{2}\right)^x = \frac{1}{3}, \\ \left(\frac{7}{2}\right)^x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \log_{\frac{7}{2}}\frac{1}{3}, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{\log_{\frac{7}{2}}\frac{1}{3}\right\}$.

82. (7.197) Решить уравнение $4^{\lg x+1} - 6^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x^2+2}$.

Решение. Выполним преобразования

$(4^{\lg x} \cdot 4 - 6^{\lg x} = 2 \cdot 3^{\lg x^2} \cdot 3^2) \leftrightarrow (4^{\lg x} \cdot 4 - 6^{\lg x} = 18 \cdot 9^{\lg x})$.

Разделим обе части последнего уравнения на $9^{\lg x}$, получим

$$\left(\left(\frac{4}{9}\right)^{\lg x} \cdot 4 - \left(\frac{6}{9}\right)^{\lg x} = 18\right) \leftrightarrow \left(\left(\frac{4}{9}\right)^{\lg x} \cdot 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = 18\right).$$

Обозначим $\left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = y$, тогда имеем

$$(4y^2 - y - 18 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{9}{4}, \\ y = -2 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = \frac{9}{4}, \\ \left(\frac{2}{3}\right)^{\lg x} = -2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lg x = -2, \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow (x = 10^{-2}).$$

*Ответ:* $x \in \{0{,}01\}$.

Решить уравнения:

83. $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$.

84. $5^{1+\frac{2}{x}} - 7 \cdot 10^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$.

85. $4\sqrt[x]{81} - 12\sqrt[x]{36} + 9\sqrt[x]{16} = 0$.

86. $3 \cdot 9^x + 5 \cdot 6^x = 2^{2x+1}$.

87. (7.196) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{2x+2} = 0$.

88. $81^x - 16^x - 2 \cdot 9^x(9^x - 4^x) + 36^x = 0$.

89. (7.061) $\sqrt[x]{100} + \sqrt[x]{25} = 4{,}25\sqrt[x]{50}$.

90. (7.305) $5^{\lg x} - 3^{\lg x} = 5{,}(3) \cdot 3^{\lg \sqrt{x}} \cdot 5^{\frac{1}{2}(\lg x - 2)}$.

## § 7. Применение различных методов

91. Решить уравнение $\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$.

Решение. Находим область определения, решая неравенство $(\log_2(-x) \geqslant 0) \leftrightarrow (x \leqslant -1)$. Так как $\sqrt{x^2} = |x|$, $x \leqslant -1$, то $|x| = -x$. Таким образом, исходное уравнение принимает вид

$$\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2(-x).$$

Подстановка $\log_2(-x) = y$ приводит к уравнению

$$(\sqrt{5y} = y) \leftrightarrow (5y = y^2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 0, \\ y = 5 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2(-x) = 0, \\ \log_2(-x) = 5 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2^0 = -x, \\ 2^5 = -x \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -32. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \{-32; -1\}$.

92. Решить уравнение $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = 2^x$.

Решение. Легко убедиться, что $x = 2$ является корнем данного уравнения. Докажем, что других корней оно не имеет. Для этого разделим обе части уравнения на $2^x$, получим

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x = 1.$$

Так как $0 < \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} < 1$ и $0 < \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} < 1$, то функ-

ции $\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ и $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x$ монотонно убывающие, их сумма — также монотонно убывающая. Следовательно, такая функция принимает любое положительное значение только в одной точке. Таким образом, найденное значение $x=2$ будет единственным корнем уравнения.

**93.** Решить уравнение $3^{\frac{1}{2}+\log_{16}x}+3^{\log_{16}x-\frac{1}{2}}=\sqrt{x}$.

Решение. Находим область определения уравнения: $x>0$. Выполним преобразования, представив $x$ в виде $x=16^{\log_{16}x}$; получим

$$\left(3^{\frac{1}{2}}\cdot 3^{\log_{16}x}+\frac{3^{\log_{16}x}}{\sqrt{3}}=\sqrt{16^{\log_{16}x}}\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(3^{\log_{16}x}\left(\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=4^{\log_{16}x}\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left(3^{\log_{16}x}\cdot\frac{4}{\sqrt{3}}=4^{\log_{16}x}\right)\leftrightarrow\left(\frac{4}{\sqrt{3}}=\left(\frac{4}{3}\right)^{\log_{16}x}\right).$$

Логарифмируя обе части уравнения по основанию $\frac{4}{3}$, получим

$$\log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}=\log_{16}x,\ \text{откуда}\ x=16^{\log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}}.$$

*Ответ:* $x\in\left\{16^{\log_{\frac{4}{3}}\frac{4}{\sqrt{3}}}\right\}$.

**94.** Решить уравнение $\log_2 3+2\sqrt[\log_2 x]{x^{\log_2 16}}=4$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\sqrt[\log_2 x]{x^{\log_2 16}}=x^{\frac{\log_2 16}{\log_2 x}}=x^{\frac{\log_2 4}{\log_2 x}}=x^{\log_x 4}=4.$$

Исходное уравнение заменяется равносильным:

$$(\log_2 3+2\log_4 x=4)\leftrightarrow\left(\log_2 3+\frac{2\log_2 x}{\log_2 4}=4\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(\log_2 3+\log_2 x=4)\leftrightarrow(\log_2(3x)=4)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(3x=2^4)\leftrightarrow\left(x=\frac{16}{3}\right).$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{16}{3}\right\}$.

Решить уравнения:

**95.** $4^x + 10^x = 6 \cdot 25^x$. **96.** $9^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 27$.

**97.** $x^{\lg\sqrt{x}} = \sqrt[100]{10^{10\log\sqrt{10}x}}$.

**98.** $\log_5 2 - \log_x 2 = \log_{\frac{x}{5}} 2$.

**99.** $(\log_4 \sqrt[4]{4x} + \log_x \sqrt[4]{4x})^{\frac{1}{2}} + \left(\log_4 \sqrt[4]{\frac{x}{4}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{4}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2$.

**100.** $4^{2-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} - 5 \cdot 2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = 6$.

**101.** $2^{x+3} - 3^{x^2+2x-6} = 3^{x^2+2x-5} - 2^x$.

**102.** $25^{\log_x 5} \cdot x^{\log_5 x} = 125$. **103.** $4\log_{3x} 27x = \log_3 3x$.

**104.** $\log_x \log_2 (4^x - 1) = 1$.

**105.** $\log_3 (3^x - 1) \cdot \log_3 (3^{x+1} - 3) = 12$.

**106.** $\log_5 (3x) = \log_5 (9x) \cdot \log_9 3^{-1}$.

**107.** $10^{\lg^2 x} + x^{\lg x} = 20$. **108.** $\log_x \log_9 (6 - 9^{\sqrt{x}}) = \log_4 2$.

**109.** $(\sqrt{7}+1)^x + 2^{x+1}(\sqrt{7}+4)^x = 10$.

**110.** $8^{2x+1} = 0{,}125^{4-3x}$.

**111.** $\lg\sqrt{5x+8} + \frac{1}{2}\lg(2x+3) = \lg 15$.

**112.** $3^{2x+1} - 2 \cdot 9^x = 5 - 3^{2x-1}$.

**113.** $\left(\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^x + 2\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}\right)^x = \frac{11}{3} \cdot 2^{\frac{x}{2}}$.

**114.** $\sqrt[2y]{\sqrt{26}-5} - \sqrt[2y]{\sqrt{26}+5} = 10$.

**115.** $\lg(x^2 - 9x + 10) = \lg(x-6)$.

**116.** $5 \cdot 2^{2x+1} = 3^{x-1}$. **117.** $x^{3-\lg\left(\frac{200}{x}\right)} = 400$.

**118.** $\sqrt[3]{x^x} = x^{\sqrt[3]{x}}$.

ГЛАВА V

# СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

## § 1. Простейшие системы

Рассмотрим систему двух уравнений с двумя неизвестными вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \quad (1)$$

1) Если $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, то система (1) имеет единственное решение, которое находится способом подстановки: из первого уравнения системы находим $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$ и подставляем во второе, тогда для нахождения $y$ получим линейное уравнение.

2) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система (1) не имеет решения.

3) Если $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, $a_1 \neq 0$, то система имеет бесконечное множество решений вида

$$\left\{x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1},\ y \text{ — любое число}\right\}.$$

Системы вида

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ xy = c_2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x^2 + b_2 xy + c_2 y^2 = d_2, \end{cases} \tag{2}$$

а также систему (1) при условии $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ будем называть простейшими. Все они решаются способом подстановки. Рассмотрим различные способы приведения систем к простейшим.

## § 2. Замена переменных

1. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{6x}{x+y}} + \sqrt{\frac{x+y}{6x}} = \frac{5}{2}, \\ xy - x - y = 9. \end{cases}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{\frac{6x}{x+y}} = t$, тогда из первого уравнения имеем

$$\left(t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2}\right) \leftrightarrow \left(t^2 - \frac{5}{2}t + 1 = 0\right) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Подставляя вместо $t$ его значения и используя второе уравнение системы, получаем две системы уравнений:

$$\text{а)}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=2,\\ xy-x-y=9\end{cases}\quad\text{и}\quad\text{б)}\begin{cases}\sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}=\dfrac{1}{2},\\ xy-x-y=9.\end{cases}$$

Решая их способом подстановки, получим

$$\text{а)}\begin{cases}\dfrac{6x}{x+y}=4,\\ xy-x-y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ xy-x-y=9\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ 2y^2-3y-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2y,\\ \left[\begin{array}{l}y=3,\\ y=-1{,}5;\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\text{б)}\begin{cases}\dfrac{6x}{x+y}=\dfrac{1}{4},\\ xy-x-y=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=23x,\\ xy-x-y=9\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}y=23x,\\ 23x^2-24x-9=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=23x,\\ x=\dfrac{12\pm\sqrt{351}}{23}.\end{cases}$$

*Ответ:* $\left\{(6;\,3),\,(-3;\,-1{,}5),\,\left(\dfrac{12\pm\sqrt{351}}{23};\;12+\sqrt{351}\right),\right.$
$\left.\left(\dfrac{12-\sqrt{351}}{23};\;12-\sqrt{351}\right)\right\}$.

**2.** Решить систему

$$\begin{cases}\dfrac{3}{x^2+y^2-1}+\dfrac{2y}{x}=1,\\ x^2+y^2+\dfrac{4x}{y}=22.\end{cases}$$

Решение. Вводим новые переменные $t$ и $z$ по формулам $t=x^2+y^2-1$, $z=\dfrac{x}{y}$, получим

$$\begin{cases}\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{z}=1,\\ t+1+4z=22\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{t}+\dfrac{2}{z}=1,\\ t=21-4z\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3}{21-4z}+\dfrac{2}{z}=1,\\ t=21-4z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2z^2-13z+21=0,\\ t=21-4z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}z=3{,}5\text{ или }z=3,\\ t=21-4z\end{cases}\Leftrightarrow(z=3{,}5,\ t=7\text{ или }z=3,\ t=9).$$

Подставляя вместо $t$ и $z$ их значения и решая полученные системы, находим

$$\text{а)}\ \begin{cases} x^2+y^2-1=7, \\ \frac{x}{y}=3{,}5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8, \\ x=3{,}5y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{53}{4}y^2=8, \\ x=3{,}5y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm\sqrt{\frac{32}{53}}, \\ x=\pm\frac{7\sqrt{8}}{\sqrt{53}}; \end{cases}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x^2+y^2-1=9, \\ \frac{x}{y}=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=10, \\ x=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2=1, \\ x=3y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y=\pm 1, \\ x=\pm 3. \end{cases}$$

*Ответ:*

$$\left\{(3;\ 1),\ (-3;\ -1),\ \left(\frac{7\sqrt{8}}{\sqrt{53}};\ \sqrt{\frac{32}{53}}\right),\right.$$
$$\left.\left(-\frac{7\sqrt{8}}{\sqrt{53}};\ -\sqrt{\frac{32}{53}}\right)\right\}.$$

3. Решить систему

$$\begin{cases} \frac{4}{x+y-1}-\frac{5}{2x-y+3}=-2{,}5, \\ \frac{3}{x+y-1}+\frac{1}{2x-y+3}=-1{,}4. \end{cases}$$

Решение. Производим замену переменных $x+y-1=\frac{1}{z}$; $2x-y+3=\frac{1}{t}$, получаем систему

$$\begin{cases} 4z-5t=-2{,}5, \\ 3z+t=-1{,}4. \end{cases}$$

Решая полученную систему способом подстановки, находим $z=-0{,}5$; $t=0{,}1$. Далее имеем

$$\begin{cases} x+y-1=-2, \\ 2x-y+3=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-3. \end{cases}$$

*Ответ:* $\{(2;\ -3)\}$.

Решить системы:

4. (6.223) $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1, \\ 2x+y=2. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{\frac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\frac{2x}{3x-2y}}=2, \\ 4y^2-1=3y(x-1). \end{cases}$

6. $\begin{cases} y^2+\sqrt{3y^2-2x+3}=\frac{2}{3}x+5, \\ 3x-2y=5. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x+y}{5x}}+\sqrt{\frac{5x}{x+y}}=\frac{34}{15}, \\ x+y+xy=29. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2=8, \\ \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{1}{2}. \end{cases}$

9. (6.194) $\begin{cases} \frac{5}{x^2-xy}+\frac{4}{y^2-xy}=-\frac{1}{6}, \\ \frac{7}{x^2-xy}-\frac{3}{y^2-xy}=\frac{6}{5}. \end{cases}$

10. (6.075) $\begin{cases} x^2y+xy^2=6, \\ xy+x+y=5. \end{cases}$

11. (6.235) $\begin{cases} \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5, \\ \sqrt[3]{\frac{y+1}{x}}-2\sqrt[3]{\frac{x}{y+1}}=1. \end{cases}$

12. $\begin{cases} \frac{1}{x^3+y^3}+2xy=\frac{21}{5}, \\ \frac{1}{2xy}+x^2+y^2=\frac{21}{4}. \end{cases}$

13. $\begin{cases} 5\sqrt{x^2-3y-1}+\sqrt{x+6y}=19, \\ 3\sqrt{x^2-3y-1}=1+2\sqrt{x+6y}. \end{cases}$

14. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=\frac{5}{2}\sqrt[6]{xy}, \\ x+y=65. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sqrt{\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{y}{x}}=\frac{7}{\sqrt{xy}}+1, \\ x\sqrt{xy}+y\sqrt{xy}=78. \end{cases}$

## § 3. Применение однородных уравнений

При решении систем вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1y^2 + c_1xy = d_1, \ d_1 \neq 0, \\ a_2x^2 + b_2y^2 + c_2xy = d_2, \ d_2 \neq 0, \end{cases}$$

умножаем обе части первого уравнения на $d_2$, а обе части второго уравнения на $d_1$. Тогда правые части обоих уравнений будут равны, поэтому можно приравнять и левые части. После преобразований полученного уравнения получим однородное уравнение. Приведем пример.

**16.** Решить систему

$$\begin{cases} 3x^2 + 2xy + y^2 = 11, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$$

Решение. Умножим обе части первого уравнения на 17, а обе части второго на 11:

$$\begin{cases} 51x^2 + 34xy + 17y^2 = 187, \\ 11x^2 + 22xy + 33y^2 = 187, \end{cases}$$

откуда

$$(51x^2 + 34xy + 17y^2 = 11x^2 + 22xy + 33y^2) \leftrightarrow (40x^2 + 12xy - 16y^2 = 0) \leftrightarrow (10x^2 + 3xy - 4y^2 = 0).$$

Разделим обе части полученного однородного уравнения на $y^2$:

$$\left(10\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 3\left(\frac{x}{y}\right) - 4 = 0\right) \leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = z, \\ 10z^2 + 3z - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = zy, \\ \left[\begin{array}{l} z = -0{,}8, \\ z = 0{,}5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Подставляя вместо $z$ его значения, получим две системы:

а) $\begin{cases} \frac{x}{y} = -0{,}8, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{1}{2}, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17. \end{cases}$

Решая их способом подстановки, находим

а) $\begin{cases} x = -0{,}8y, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}, \\ y = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 2x, \\ x^2 + 2xy + 3y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 1, \\ y = \pm 2. \end{cases}$

Рассмотрим системы, которые приводятся к однородным.

**17.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x + xy + y = 2. \end{cases}$$

Решение. Второе уравнение системы перепишем в виде $x + y = 2 - xy$. Далее возведём обе части этого уравнения в квадрат:

$$x^2 + 2xy + y^2 = 4 - 4xy + (xy)^2.$$

Данную систему перепишем в таком виде:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + y^2 + 6xy = 4 + (xy)^2. \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое, получим

$$(5xy = (xy)^2) \Rightarrow \begin{cases} xy = z, \\ 5z = z^2 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0, \\ z = 5. \end{array}\right.$$

Подставляя вместо $z$ его значения, получим две системы:

$$\text{а)} \begin{cases} xy = 0, \\ x + y = 2 - xy \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 2; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\text{б)} \begin{cases} xy = 5, \\ x + y = 2 - xy \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{y}, \\ \dfrac{5}{y} + y = -3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{y}, \\ y^2 + 3y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{y}, \\ y \in \varnothing. \end{cases}$$

*Ответ:* $\{(0; 2), (2; 0)\}$.

Решить системы:

**18.** $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 19(x - y)^2, \\ x^2 - xy + y^2 = 7(x - y). \end{cases}$

**19.** $\begin{cases} x + y - \sqrt{xy} = 7, \\ x^2 + y^2 + xy = 133. \end{cases}$

**20.** $\begin{cases} x^4 + x^2y^2 + y^4 = 481, \\ x^2 + xy + y^2 = 37. \end{cases}$ **21.** $\begin{cases} \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = 4, \\ x + y = 28. \end{cases}$

**22.** $\begin{cases} x^4 + 3x^2y^2 + y^4 = 109, \\ x^2 + y^2 + xy = 13. \end{cases}$

**23.** $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 5} + \sqrt{y^2 - 5} = 5, \\ x^2 + y^2 = 13. \end{cases}$

### § 4. Системы, симметричные относительно неизвестных

К системам, симметричным относительно неизвестных, относим те, которые не изменяются при любых перестановках неизвестных.

**24.** Решить систему

$$\begin{cases} x^3 = 5x + y, \\ y^3 = 5y + x. \end{cases}$$

Решение. Сначала сложим, а затем вычтем обе части уравнений, получим равносильную систему

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 6(x + y), \\ x^3 - y^3 = 4(x - y) \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^3 + y^3 - 6(x + y) = 0, \\ x^3 - y^3 - 4(x - y) = 0 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (x + y)(x^2 - xy + y^2 - 6) = 0, \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 4) = 0. \end{cases}$$

Очевидно, последняя система распадается на четыре системы:

1) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 6, \\ x^2 + xy + y^2 = 4. \end{cases}$

Первые три системы — простейшие и имеют решения:

$$(0;\ 0),\ (\pm 2;\ \mp 2),\ (\pm\sqrt{6};\ \pm\sqrt{6}).$$

Решая четвёртую систему, сложим и вычтем обе части уравнений, получим

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = 10, \\ -2xy = 2 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5, \\ xy = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{y}, \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{y}, \\ \frac{1}{y^2} + y^2 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{y}, \\ y^4 - 5y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Подстановка $y^2 = z$ приводит к уравнению $z^2 - 5z + 1 = 0$, откуда $z = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$. Далее имеем

$$y = \pm \sqrt{z} = \pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}}, \quad x = -\frac{1}{y} = \mp \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}.$$

*Ответ:* $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}; -\frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}; \frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{21}}}{\sqrt{2}}\right), (0; 0), (\pm 2; \mp 2), (\pm \sqrt{6}; \pm \sqrt{6})\right\}$.

**25.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y = 1, \\ y^2 + x = 1. \end{cases}$$

Решение. Произведём вычитание соответствующих частей обоих уравнений и выполним преобразования:

$$(x^2 - y^2 + y - x = 0) \Leftrightarrow ((x - y)\ (x + y) - (x - y) = 0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow ((x - y)\ (x + y - 1) = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0, \\ x + y - 1 = 0. \end{array}\right.$$

Далее решаем две системы:

а) $\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ y^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ x^2 + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - x, \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 1, \\ x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0, \\ x = 1. \end{cases} \end{array}\right.$

*Ответ:* $\left\{(0; 1), (1; 0), \left(\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Решить системы:

**26.** $\begin{cases} (x^2 + x + 1)\ (y^2 + y + 1) = 3, \\ (1 - x)\ (1 - y) = 6. \end{cases}$

**27.** (6.197) $\begin{cases} x^3 + y^4 = 20, \\ x^4 + y^3 = 20. \end{cases}$

**28.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = 19, \\ (xy + 8)(x + y) = 2. \end{cases}$ **29.** $\begin{cases} x^3 + 2y = 6x, \\ y^3 + 2x = 6y. \end{cases}$

## § 5. Несимметричные системы

**30.** Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{y} + \dfrac{\sqrt[3]{2x+y}}{2x} = \dfrac{81}{182}, \\ \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{y} - \dfrac{\sqrt[3]{2x-y}}{2x} = \dfrac{1}{182}. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Область определения системы: $x \neq 0$, $y \neq 0$. После преобразований получим

$$\begin{cases} (2x+y)\sqrt[3]{2x+y} = \dfrac{81xy}{91}, \\ (2x-y)\sqrt[3]{2x-y} = \dfrac{xy}{91} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x+y)^{\frac{4}{3}} = \dfrac{81xy}{91}, \\ (2x-y)^{\frac{4}{3}} = \dfrac{xy}{91}. \end{cases}$$

Так как в левой части уравнений показатели степеней одинаковы, то удобно разделить соответствующие части обоих уравнений:

$$\left( \left( \frac{2x+y}{2x-y} \right)^{\frac{4}{3}} = 81 \right) \Rightarrow \left( \frac{2x+y}{2x-y} = \pm 27 \right).$$

Далее решаем две системы:

а) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{2x-y} = 27, \\ (2x-y)^{\frac{4}{3}} = \dfrac{xy}{91} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{13}y, \\ \left(\dfrac{y}{13}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\dfrac{y}{13}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \pm 13, \\ x = \pm 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{2x+y}{2x-y} = -27, \\ (2x-y)^{\frac{4}{3}} = \dfrac{xy}{91} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{28}{13}x, \\ \left(\dfrac{2x}{13}\right)^{\frac{4}{3}} = \left(\dfrac{2x}{13}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 6{,}5, \\ y = \pm 14. \end{cases}$

*Ответ:* $\{(\pm 7; \pm 13), (\pm 6{,}5; \pm 14)\}$.

31. Решить систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}-\sqrt{x^2-y^2}} = \dfrac{5+\sqrt{7}}{5-\sqrt{7}}, \\ x^3+2y^3=18. \end{cases}$$

Решение. После преобразований первого уравнения системы получаем $\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{5} = \dfrac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{7}}$, откуда $y = \pm\dfrac{3x}{4}$. Далее решаем две системы:

а) $\begin{cases} y=\dfrac{3x}{4}, \\ x^3+2y^3=18 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{3x}{4}, \\ 59x^3=32\cdot 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4a, \\ y=3a, \end{cases}$

где $a=\sqrt[3]{\dfrac{9}{59}}$;

б) $\begin{cases} y=-\dfrac{3x}{4}, \\ x^3+2y^3=18 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{3x}{4}, \\ 5x^3=32\cdot 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4b, \\ y=-3b, \end{cases}$

где $b=\sqrt[3]{1{,}8}$.

Решить системы:

32. $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^3+xy^2=10, \\ y^3+x^2y=5. \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^2+x\sqrt[3]{xy^2}=32, \\ y^2+y\sqrt[3]{x^2y}=162. \end{cases}$

## § 6. Системы показательных и логарифмических уравнений

35. Решить систему

$$\begin{cases} x^y=y^x, \\ x^3=y^2. \end{cases}$$

Решение. Находим область определения: $x>0$, $y>0$. Из второго уравнения системы имеем $x=\sqrt[3]{y^2}=y^{\frac{2}{3}}$. Далее решаем систему

$$\begin{cases}\left(y^{\frac{2}{3}}\right)^{y}=(y)^{y^{\frac{2}{3}}},\\ x=y^{\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{cases}y=1,\\ \frac{2}{3}y=y^{\frac{2}{3}},\\ x=y^{\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{cases}y=1,\\ x=y^{\frac{2}{3}},\end{cases}\right.\right.$$

$$\left.\left.\begin{cases}\frac{2}{3}y=y^{\frac{2}{3}},\\ x=y^{\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\right.\right.$$

$$\Rightarrow\left[\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ \frac{8}{27}y^{3}=y^{2},\\ x=y^{\frac{2}{3}}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{cases}x=1,\\ y=1,\\ y=0,\\ x=0,\end{cases}\right.\right.$$

$$\left.\left.\begin{cases}y=\frac{27}{8},\\ x=\frac{9}{4}.\end{cases}\right.\right.$$

Решение $\begin{cases}x=0,\\ y=0\end{cases}$ — постороннее, так как оно не принадлежит области определения.

*Ответ:* $\left\{(1;\ 1),\ \left(\frac{9}{4};\ \frac{27}{8}\right)\right\}$.

**36.** (7.264) Решить систему

$$\begin{cases}5^{\sqrt[3]{x}}\cdot 2^{\sqrt{y}}=200,\\ 5^{2\sqrt[3]{x}}+2^{2\sqrt{y}}=689.\end{cases}$$

Решение. Обозначим $5^{\sqrt[3]{x}}=z$, $2^{\sqrt{y}}=t$ $(z>0, t>0)$, тогда получим равносильную систему

$$\begin{cases}zt=200,\\ z^2+t^2=689.\end{cases}$$

К обеим частям второго уравнения прибавим обе части первого уравнения, умноженные на два:

$$(z^2+t^2+2zt=689+400)\leftrightarrow((z+t)^2=1089).$$

При вычитании соответствующих частей тех же уравнений получим

$$(z^2+t^2-2zt=689-400)\leftrightarrow((z-t)^2=289).$$

Далее имеем

$$\begin{cases} z+t=\sqrt{1089}=33, \\ z-t=\pm 17 \end{cases} \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=25, \\ t=8, \end{cases} \\ \begin{cases} z=8, \\ t=25. \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставляя вместо $z$ и $t$ их значения, получаем две системы уравнений:

а) $\begin{cases} 5\sqrt[3]{x}=25, \\ 2\sqrt{y}=8 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt[3]{x}=5^2, \\ 2\sqrt{y}=2^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 5\sqrt[3]{x}=8, \\ 2\sqrt{y}=25 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x}=\log_5 8, \\ \sqrt{y}=\log_2 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=(\log_5 8)^3, \\ y=(\log_2 25)^2. \end{cases}$

*Ответ:* $\{(8;\ 9),\ (\log_5^3 8;\ \log_2^2 25)\}$.

**37.** Решить систему

$$\begin{cases} xy=a, \\ \lg^2 x+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a. \end{cases}$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\begin{cases} x=\frac{a}{y}, \\ \left(\lg\frac{a}{y}\right)^2+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{y}, \\ (\lg a-\lg y)^2+\lg^2 y=\frac{5}{2}\lg^2 a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{y}, \\ \lg y=t, \\ (\lg a-t)^2+t^2=\frac{5}{2}\lg^2 a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{a}{y}, \\ \lg y=t, \\ \left[\begin{array}{l} t=-0{,}5\lg a, \\ t=1{,}5\lg a \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=a^{-0,5}, \\ x=a^{1,5} \end{cases} \\ \begin{cases} y=a^{1,5}, \\ x=a^{-0,5}. \end{cases} \end{array}\right.$$

*Ответ:* $\{(a^{1,5};\ a^{-0,5}),\ (a^{-0,5};\ a^{1,5})\}$.

Решить системы:

**38.** $\begin{cases} 2^x(x+y)=10, \\ \sqrt[x]{x+y}=5. \end{cases}$ **39.** $\begin{cases} \sqrt[y]{4^x}=32\sqrt[x]{8^y}, \\ \sqrt[y]{3^x}=3\sqrt[y]{9^{1-y}}. \end{cases}$

**40.** $\begin{cases} 8^{2x+1}=32\cdot 2^{4y-1}, \\ 5\cdot 5^{x-y}=5^{2y+1}. \end{cases}$ **41.** $\begin{cases} x^{\sqrt{y}}=y, \\ y^{\sqrt{y}}=x^4. \end{cases}$

42. $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x+y}, \\ x^2 = y^{-1}. \end{cases}$ 43. $\begin{cases} \log_{0,5}(y-x) = \log_2 \frac{1}{y} + 2, \\ x^3 + y^2 = 1. \end{cases}$

44. (7.251) Решить систему

$$\begin{cases} (x+y)\,3^{y-x} = \frac{5}{27}, \\ 3\log_5(x+y) = x-y. \end{cases}$$

Решение. Из первого уравнения имеем $x+y = \frac{5}{27} \cdot 3^{x-y}$. Из второго уравнения $\log_5(x+y) = \frac{x-y}{3}$, откуда $x+y = 5^{\frac{x-y}{3}}$. Получаем систему

$$\begin{cases} x+y = 5^{\frac{x-y}{3}}, \\ x+y = 5 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{x-y}. \end{cases} \qquad (3)$$

Далее рассмотрим равносильные уравнения

$$(5^{\frac{x-y}{3}} = 5 \cdot 3^{x-y-3}) \leftrightarrow (5^{\frac{x-y}{3}-1} = 3^{x-y-3}) \leftrightarrow (5^{\frac{x-y-3}{3}} = 3^{x-y-3}) \leftrightarrow ((\sqrt[3]{5})^{x-y-3} = 3^{x-y-3}).$$

Отсюда $(x-y-3=0) \leftrightarrow (x-y=3)$. Подставляя в систему (3), имеем

$$\begin{cases} x+y=5, \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=4, \\ y=1. \end{cases}$$

*Ответ:* $\{(4;\ 1)\}$.

45. (7.256) Решить систему

$$\begin{cases} 2\left(\log_{\frac{1}{y}} x - 2\log_{x^2} y\right) + 5 = 0, \\ xy^2 = 32. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем левую часть первого уравнения, перейдя к логарифмам с основанием $x$:

$$\left(2\left(\frac{1}{\log_x \frac{1}{y}} - \frac{2\log_x y}{\log_x x^2}\right) + 5 = 0\right) \leftrightarrow \left(2\left(\frac{-1}{\log_x y} - \log_x y\right) + 5 = 0\right).$$

Сделав подстановку $\log_x y = t$, находим

$$\left(-\frac{2}{t} - 2t + 5 = 0\right) \Rightarrow (2t^2 - 5t + 2 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = \frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая, что $(\log_x y = t) \leftrightarrow (y = x^t)$, получаем две системы:

а) $\begin{cases} y = x^2, \\ xy^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2, \\ x^5 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 4; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^{5,5}, \\ xy^2 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x^3 = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2\sqrt[4]{2}, \\ x = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}. \end{cases}$

*Ответ:* $\{(2;\ 4),\ (4\sqrt{2};\ 2\sqrt[4]{2}.)\}$

**46.** (7.309) Решить систему

$$\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

Решение. В первом уравнении системы перейдем к логарифмам с основанием 2:

$$\log_2(x+y) - \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3} = 1,$$

Из второго уравнения имеем $((x-y)(x+y) = 2) \leftrightarrow (x + y = \frac{2}{x-y})$. Подставляя это соотношение в первое уравнение системы, получим

$$\left(\log_2\left(\frac{2}{x-y}\right) - \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3} = 1\right) \Rightarrow \left(1 - \log_2(x-y) - \right.$$

$$\left. - \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3} = 1\right) \Rightarrow \left(\log_2(x-y) + \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 3} = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\log_2(x-y)\left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right) = 0\right) \Rightarrow (\log_2(x-y) = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x - y = 1).$$

Далее решаем систему

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

*Ответ:* $\left\{\left(\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Решить системы:

**47.** $\begin{cases} x^p = y^q, \\ \log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}. \end{cases}$ **48.** $\begin{cases} 3^{\lg x} = 4^{\lg y}, \\ (4x)^{\lg 4} = (3y)^{\lg 3}. \end{cases}$

49. $\begin{cases} x+y=10, \\ 2\,(3\log_y x - \log_{\frac{1}{z}} y) = 7. \end{cases}$ 50. $\begin{cases} x^y = 2, \\ (2x)^{y^2} = 64. \end{cases}$

51. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y^2} + 7y^{\log_3 x^2} = 2187, \\ xy = 9\sqrt[3]{9}. \end{cases}$

52. $\begin{cases} (x^2-y^2)^{\lg(x-y)} = 0{,}1, \\ (x+y)^{2\lg(x^2-y^2)} = 10^4. \end{cases}$

53. $\begin{cases} \log_x y - 4\log_y x = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$ 54. $\begin{cases} (x-y)^{\lg(x+1{,}5)} = 0{,}2, \\ (2x+3)^{\frac{1}{\lg(x-y)}} = 0{,}1. \end{cases}$

55. $\begin{cases} \log_3(2x-y) + \log_4(2x+y) = 1, \\ y^2 = 4(x^2-1). \end{cases}$

## § 7. Системы с тремя неизвестными

Рассмотрим способы решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

**56.** Решить систему

$$\begin{cases} y+z=3, \\ z+x=-5, \\ x+y=4. \end{cases}$$

Решение. Это система линейных уравнений, которую можно решить способом подстановки либо способом исключения неизвестных. Сложив обе части первого и второго уравнений, получим $y+x+2z=-2$; используя третье уравнение, находим $(2z=-6) \leftrightarrow (z=-3)$. Подставляя значение $z$ в первое и второе уравнения, находим значения всех неизвестных.

*Ответ:* $\{(-2;\ 6;\ -3)\}$.

**57.** Решить систему

$$\begin{cases} yz=4, \\ xz=3, \\ xy=27. \end{cases}$$

Решение. Перемножив все соответствующие части первого и второго уравнений и использовав третье уравнение, получим

$$\begin{cases} yz = 4, \\ xz = 3, \\ xyz^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 4, \\ xz = 3, \\ 27z^2 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} yz = 4, \\ xz = 3, \\ z = \pm \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 4{,}5, \\ y = \pm 6, \\ z = \pm \frac{2}{3} \end{cases}$$

*Ответ:* $\left\{\left(\pm 4{,}5;\ \pm 6;\ \pm \frac{2}{3}\right)\right\}$.

**58.** Решить систему

$$\begin{cases} (z + y)x = -5, \\ y(z + x) = 4, \\ z(x + y) = 3. \end{cases}$$

Решение. Раскрыв скобки и сложив соответствующие части уравнений, получим

$$(2(xz + xy + yz) = 2) \leftrightarrow (xz + xy + yz = 1).$$

Сравнивая это соотношение с каждым уравнением системы, получим

$$\begin{cases} yz = 6, \\ xz = -3, \\ xy = -2. \end{cases}$$

Эта система аналогична системе, рассмотренной в предыдущем примере. Решая ее, находим $x = \pm 1$, $y = \pm 2$, $z = \pm 3$.

*Ответ.* $\{(\pm 1;\ \pm 2;\ \pm 3)\}$.

**59.** Решить систему

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$\begin{cases} x + y - z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 - z^3 = 8 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 + z, \\ x^2 + y^2 = 6 - z^2, \\ x^3 + y^3 = 8 + z^3. \end{cases}$$

Возведем обе части первого уравнения последней системы в квадрат, вычтем из него второе уравнение и выполним преобразования:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 4 + 4z + z^2, \\ x^2 + y^2 = 6 - z^2, \\ x^3 + y^3 = 8 + z^3 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = z^2 + 2z - 1, \\ x + y = 2 + z, \\ (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 8 + z^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = z^2 + 2z - 1, \\ x + y = 2 + z, \\ (x+y)((x+y)^2 - 3xy) = 8 + z^3 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = z^2 + 2z - 1, \\ x + y = 2 + z, \\ (2+z)((2+z)^2 - 3(z^2 + 2z - 1)) = 8 + z^3. \end{cases}$$

Решая третье уравнение системы, получим

$$z_1 = -2,\ z_2 = 1,\ z_3 = -1.$$

Подставляя в систему $\begin{cases} x + y = 2 + z, \\ xy = z^2 + 2z - 1 \end{cases}$ найденные значения $z$, получим три простейшие системы:

а) $\begin{cases} z = -2, \\ x + y = 0, \\ xy = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -2, \\ x = -y, \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -2, \\ y = \mp 1, \\ x = \pm 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} z = 1, \\ x + y = 3, \\ xy = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1, \\ x = 3 - y, \\ (3-y)y = 2 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} z = 1, \\ x = 1, \\ y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = 1, \\ x = 2, \\ y = 1; \end{cases} \right)$

в) $\begin{cases} z = -1, \\ x + y = 1, \\ xy = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -1, \\ x = 1 - y, \\ (1-y)y = -2 \end{cases} \Rightarrow \left( \begin{cases} z = -1, \\ x = -1, \\ y = 2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} z = -1, \\ x = 2, \\ y = -1. \end{cases} \right)$

*Ответ:* $\{(\pm 1; \mp 1; -2), (\pm 1; 2; \pm 1), (2; \pm 1; \pm 1)\}$.

**60.** Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 1, \\ y^2 + yz + z^2 = 3, \\ x^2 + xz + z^2 = 7. \end{cases}$$

**Решение.** Вычтем из первого уравнения второе и из второго третье, затем разделим полученные уравнения и выполним преобразования:

$$\begin{cases}(x-z)(x+y+z)=-2,\\(y-x)(x+y+z)=-4,\\x^2+xz+z^2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2+xy+y^2=1,\\x^2+xz+z^2=7,\\\dfrac{x-z}{y-x}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}13x^2-14xz+4z^2=1,\\x^2+xz+z^2=7,\\y=3x-2z.\end{cases}$$

Умножим первое уравнение последней системы на 7 и вычтем из него второе, получим

$$90x^2-99xz+27z^2=0.$$

Делим обе части полученного однородного уравнения на $9z^2$:

$$\left(10\left(\frac{x}{z}\right)^2-11\left(\frac{x}{z}\right)+3=0\right)\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x}{z}=t,\\10t^2-11t+3=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=zt,\\\left[\begin{array}{l}t=0{,}6,\\t=0{,}5.\end{array}\right.\end{cases}$$

Далее решаем системы:

а) $$\begin{cases}x=0{,}6z,\\y=3x-2z,\\x^2+xz+z^2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0{,}6z,\\y=3x-2z,\\z^2=\dfrac{25}{7}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}},\\y=\mp\dfrac{1}{\sqrt{7}},\\z=\pm\dfrac{5}{\sqrt{7}};\end{cases}$$

б) $$\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}z,\\y=3x-2z,\\x^2+xz+z^2=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-x,\\z=2x,\\x^2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\pm1,\\y=\mp1,\\z=\pm2.\end{cases}$$

*Ответ:* $\left\{\left(\pm\dfrac{3}{\sqrt{7}};\ \mp\dfrac{1}{\sqrt{7}};\ \pm\dfrac{5}{\sqrt{7}}\right),\ (\pm1;\ \mp1;\ \pm2)\right\}$.

Решить системы:

61. $\begin{cases} x+y+z=-2, \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-\frac{1}{2}, \\ xyz=2. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x-y+z=2, \\ x^2-xy+yz=1, \\ y^2-yz+xz=1. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^4+y^4-z^4=560. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x+y=3z, \\ x^2+y^2=5z, \\ x^3+y^3=9z. \end{cases}$

65. $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ yz+xz+xy=47, \\ (z-x)(z-y)=2. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x^2+y^2=z^2, \\ yz+xz+xy=1, \\ (z-x)(z-y)=0. \end{cases}$

68. $\begin{cases} y+z=\frac{2}{xyz}, \\ z+x=\frac{3}{xyz}, \\ x+y=\frac{4}{xyz}. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x+y=\frac{1}{z}, \\ y+z=\frac{1}{x}, \\ z+x=\frac{1}{y}. \end{cases}$

70. $\begin{cases} y^3+z^3=7x^3, \\ y+z=3x, \\ y-z=-x. \end{cases}$

ГЛАВА VI

## НЕРАВЕНСТВА

*Два аналитических выражения, соединенные между собой одним из знаков* $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$, $\neq$, *образуют неравенство.*

При решении неравенств преобразуем обе части, заменяя неравенство эквивалентным (равносильным). *Равносильными* называются неравенства, если все решения одного неравенства являются решениями второго неравенства, и наоборот.

Например, неравенства $x-1>0$ и $x^3-1>0$ равносильны, так как имеют одинаковое решение $x>1$. Если обе части неравенства умножить на положительное число или на положительное алгебраическое выражение, то по-

лучим равносильное неравенство. Например, $\frac{x-1}{x+2} > 0$ и $(x-1)(x+2) > 0$ равносильны, так как второе неравенство получено из первого умножением обеих частей его на $(x+2)^2 \geqslant 0$. Таким же образом получаем равносильные неравенства

$$\left(\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0\right) \rightarrow (P_n(x)\,Q_m(x) > 0),$$

где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены с целыми степенями $x$.

## § 1. Метод интервалов

Для решения неравенств вида $(x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n) > 0$ применяется метод интервалов. Суть его в следующем:

1) находим корни всех сомножителей;

2) откладываем полученные значения на числовой прямой;

3) исследуем знак алгебраического выражения в каждом из полученных интервалов.

Приведем примеры.

1. Решить неравенство $(2x-1)(3x+2)(x+1) < 0$.

Решение. Приравнивая сомножители к нулю, находим корни:

$$\begin{cases} 2x-1=0, \\ 3x+2=0, \\ x+1=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}, \\ x=-\frac{2}{3}, \\ x=-1. \end{cases}$$

Откладываем эти значения на числовой прямой в порядке возрастания (рис. 2), получаем четыре интервала: $x < -1$, $-1 < x < -\frac{2}{3}$, $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$, $x > \frac{1}{2}$ (значения границ интервалов $x=-1$, $x=-\frac{2}{3}$, $x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяют неравенству).

а) В интервале $x < -1$ все сомножители будут отрицательны, следовательно, и левая часть неравенства отрицательна.

б) В интервале $-1 < x < -\frac{2}{3}$ множитель $x+1 > 0$, остальные сомножители отрицательны, следовательно, левая часть неравенства положительная.

в) В интервале $-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ лишь $2x - 1 < 0$, остальные сомножители положительны, следовательно, левая часть неравенства отрицательна.

г) В интервале $x > \frac{1}{2}$ все сомножители положительны и левая часть неравенства положительна.

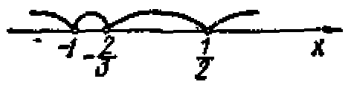



Рис. 2

Рис. 3

Расставив знаки неравенства в каждом интервале (рис. 3), нетрудно заметить, что они чередуются. Значит, достаточно знать знак левой части неравенства только в одном интервале. Решением данного неравенства будут те интервалы, где левая часть отрицательна.

*Ответ:* $x \in ]-\infty; -1[ \cup ]-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}[$.

**2.** Решить неравенство $(2x + 3)^2(3x - 5)^3(x + 1)(x - 3) < 0$.

Рис. 4

Решение. Очевидно, $(2x + 3)^2 \geqslant 0$, $(3x - 5)^2 \geqslant 0$, поэтому неравенство равносильно такой системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x + 3 \neq 0, \\ (3x - 5)(x + 1)(x - 3) < 0. \end{cases}$$

Решая это неравенство методом интервалов, находим границы интервалов $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = \frac{5}{3}$. Затем определяем знак неравенства в одном из интервалов и расставляем знаки во всех интервалах (рис. 4).

*Ответ:* $x \in \left]-\infty; -\frac{3}{2}\right[ \cup \left]-\frac{3}{2}; -1\right[ \cup \left]\frac{5}{3}; 3\right[$.

Таким образом, *если в левой части неравенства* $f(x) < 0$ *или* $f(x) > 0$ *имеются множители в четных степенях, то их можно отбросить, добавив условие, что они не равны нулю.*

**3.** (9.048) Решить неравенство $\frac{4-x}{x-5} > \frac{1}{1-x}$.

Решение. Имеем

$$\left(\frac{4-x}{x-5} - \frac{1}{1-x} > 0\right) \leftrightarrow \left(\frac{x^2-6x+9}{(x-5)(1-x)} > 0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{(x-3)^2}{(x-5)(1-x)} > 0\right) \leftrightarrow ((x-3)^2(x-5)(1-x) > 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (x-5)(1-x) > 0, \\ x-3 \neq 0. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом интервалов, находим

$$1 < x < 5, \quad x \neq 3.$$

*Ответ:* $x \in ]1; 3[ \cup ]3; 5[$.

Решить неравенства:

**4.** $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$.

**5.** $\frac{3}{x-1} < \frac{2}{2x+5}$.

**6.** $\frac{x}{3} - \frac{4}{x} < \frac{4}{3}$.

**7.** $\frac{x^2+2x-63}{x^2-8x+7} > 7$.

**8.** $x^3 - x^2 - 14x + 24 < 0$.

**9.** $\frac{2}{x-3} > \frac{x}{1-x}$.

Рассмотрим неравенства вида

$$ax^2 + bx + c > 0, \tag{1}$$

где $a > 0$, $D = b^2 - 4ac$. Возможны три случая:

1) $D > 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет различные действительные корни $(x_1 > x_2)$. Раскладывая на множители левую часть неравенства (1), получаем неравенство $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, решение которого $x \in ]-\infty; x_2[ \cup ]x_1; \infty[$ (рис. 5);

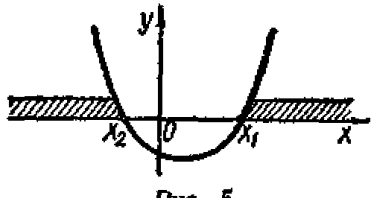


Рис. 5

2) $D = 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет равные корни $(x_1 = x_2)$, тогда $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$ и. получаем неравенство $a(x - x_1)^2 > 0$, решением которого будут все значения $x \neq x_1$;

3) $D < 0$, уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней. Тогда график функции $y = ax^2 + bx + c$ будет расположен над осью $Ox$, следовательно, при любом значении $x$ функция $y = ax^2 + bx + c$ больше нуля. Поэтому неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ имеет решение при всех значениях $x$.

При решении неравенств вида

$$ax^2 + bx + c < 0, \qquad (2)$$

где $a > 0$, получаем аналогичным образом следующие решения:

1) $D > 0$, решение неравенства (2): $x \in ]x_2; x_1[$;

2) если $D \leqslant 0$, то неравенство (2) решения не имеет.

## § 2. Системы неравенств

**10.** (9.040) Решить неравенство $\dfrac{x-7}{\sqrt{4x^2-19x+12}} < 0$.

Решение. Это неравенство эквивалентно системе $\begin{cases} x-7<0, \\ 4x^2-19x+12>0, \end{cases}$ так как подкоренное выражение должно быть положительным. Далее имеем

$$\begin{cases} x<7, \\ (4x-3)(x-4)>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x<7, \\ \left[\begin{array}{l} x<\frac{3}{4}, \\ x>4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Рис. 6

Изображая на числовой прямой решения каждого неравенства, находим пересечение полученных областей (рис. 6).

*Ответ:* $x \in \left]-\infty; \frac{3}{4}\right[ \cup ]4; 7[$.

**11.** Решить неравенство $\sqrt{2x^2+5x-6} > 2-x$.

Решение. Рассмотрим два случая: а) если $2-x<0$, то неравенство очевидно (при условии $2x^2+5x-6 \geqslant 0$). Таким образом, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2-x<0, \\ 2x^2+5x-6 \geqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>2, \\ \left[\begin{array}{l} x \leqslant \frac{-5-\sqrt{73}}{4}, \\ x \geqslant \frac{-5+\sqrt{73}}{4}, \end{array}\right. \end{cases}$$

откуда $x > 2$ (рис. 7);

*б)* если $2-x\geqslant 0$, то возводим обе части неравенства в квадрат и получаем систему неравенств

$$\begin{cases} 2x^2+5x-6>(2-x)^2, \\ 2-x\geqslant 0. \end{cases}$$

Решения этой системы $\left[\begin{array}{l} x<-10, \\ 1<x\leqslant 2. \end{array}\right.$

*Ответ:* $x\in ]-\infty;\ -10[\cup ]1;\ \infty[$.

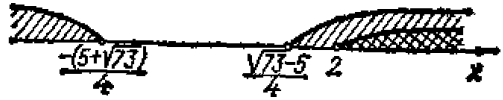



Рис. 7

**12.** (9.043) Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Р е ш е н и е. Подкоренное выражение должно быть неотрицательным и $x>0$. Возведя в квадрат обе части неравенства, получим систему

$$\begin{cases} x^2-x-12\geqslant 0, \\ x>0, \\ x^2-x-12<x^2. \end{cases}$$

Решение первого неравенства $\left[\begin{array}{l} x\leqslant -3, \\ x\geqslant 4 \end{array}\right.$; второго $x>0$; третьего $x>-12$. Находя общие точки всех интервалов, получаем: $x\geqslant 4$.

*Ответ:* $x\in[4;\ \infty[$.

**13.** (9.034) Решить неравенство $5x-20\leqslant x^2\leqslant 8x$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим равносильные системы неравенств:

$$\begin{cases} 5x-20\leqslant x^2, \\ x^2\leqslant 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-5x+20\geqslant 0, \\ x^2-8x\leqslant 0. \end{cases}$$

Первое неравенство имеет решение при всех значениях $x$, так как $D=25-80<0$, поэтому решением системы будут все решения второго неравенства: $(x(x-8)\leqslant 0)\Rightarrow$ $\Rightarrow (0\leqslant x\leqslant 8)$.

*Ответ:* $x\in[0;\ 8]$.

Решить неравенства:

**14.** $\sqrt{x^2+4x+4}<x+6$.

**15.** $\sqrt{x(x+6)+9}-\sqrt{x^2-6x+9}>1$.

**16.** $\sqrt{(x+2)(x-5)} < 8-x$.

**17.** $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x} < 1$.

**18.** $\sqrt{x^4-2x^2+1} > 1-x$.

**19.** (9.099) Найти все значения $a$, при которых неравенство

$$(a+1)x^2-2(a-1)x+3a-3 \geqslant 0$$

выполняется при всех значениях $x$.

Рис. 8

Решение. Требования этой задачи будут удовлетворены при одновременном выполнении условий $a+1>0$, $D \leqslant 0$, где $D=4((a-1)^2-(a+1)(3a-3))$. Итак, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} a+1>0, \\ (a-1)^2 \leqslant 3(a^2-1) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a>-1, \\ a^2+a-2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Изображая решения неравенств на числовой прямой (рис. 8), находим значения $a$, удовлетворяющие требованию данной задачи.

*Ответ:* $a \geqslant 1$.

**20.** (9.101) При каких значениях $p$ оба корня квадратного трёхчлена $x^2+(2p+1)x+9p-5$ отрицательны?

Решение. По теореме Виета

$$\begin{cases} x_1+x_2=-(2p+1), \\ x_1x_2=9p-5. \end{cases}$$

Так как по условию $x_1<0$, $x_2<0$, то $x_1+x_2<0$, а $x_1x_2>0$. Следовательно, получаем равносильные системы неравенств

$$\begin{cases} 2p+1>0, \\ 9p-5>0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p>-\frac{1}{2}, \\ p>\frac{5}{9} \end{cases} \Rightarrow \left(p>\frac{5}{9}\right).$$

*Ответ:* $p>\frac{5}{9}$.

**21.** (9.107) Доказать, что если $4b + a = 1$, то выполняется неравенство

$$a^2 + 4b^2 \geqslant \frac{1}{5}.$$

Решение. Преобразуем левую часть неравенства с учетом условия $4b + a = 1$:

$$a^2 + 4b^2 = (1 - 4b)^2 + 4b^2 = 20b^2 - 8b + 1 =$$
$$= 20\left(b^2 - \frac{2}{5}b\right) + 1.$$

Выделим полный квадрат:

$$20\left(b^2 - \frac{2}{5}b\right) + 1 = 20\left(b - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}.$$

Так как $\left(b - \frac{1}{5}\right)^2 \geqslant 0$, то имеем

$$20\left(b - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{1}{5} \geqslant \frac{1}{5},$$

что и требовалось доказать.

**22.** (9.222) При каких значениях $a$ система неравенств

$$-9 < \frac{3x^2 + ax - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

выполняется для всех действительных значений $x$?

**23.** Решить неравенство $\frac{\sqrt{3 - x} + 1}{x} < 1$.

**24.** В каком промежутке должно находиться число $m$, чтобы корни уравнения $x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$ находились в интервале $[-2; 4]$?

**25.** Найти, при каких значениях $m$ система уравнений

$$\begin{cases} (m + 5)x + (2m + 3)y = 3m + 2, \\ (3m + 10)x + (5m + 6)y = 2m + 4 \end{cases}$$

имеет отрицательные решения.

**26.** При каких $a$ неравенство $(a^2 + 4a - 5)x^2 - 2(a - 1)x + 2 < 0$ выполняется при всех $x$?

**27.** Решить неравенство $\sqrt{x + 3} < 1 - x$.

## § 3. Доказательство неравенств

28. Доказать, что $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ при $a>0$.

Решение. Рассмотрим очевидное неравенство $(a-1)^2\geqslant 0$. Из этого неравенства путем тождественных преобразований получим

$$(a^2-2a+1\geqslant 0)\leftrightarrow(a^2+1\geqslant 2a).$$

Так как $a>0$, то разделим обе части неравенства на $a$ и получим неравенство $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$, что и требовалось доказать.

29. Доказать неравенство Коши

$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab},$$

где $a>0$, $b>0$ (среднее арифметическое положительных чисел не меньше их среднего геометрического).

Решение. Рассмотрим очевидное неравенство $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$. Из него получим

$$\left(a+b-2\sqrt{ab}\geqslant 0\right)\leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\right).$$

30. (9.225) Доказать неравенство Коши для четырех положительных чисел $a$, $b$, $c$, $d$:

$$\frac{a+b+c+d}{4}\geqslant\sqrt[4]{abcd}.$$

Решение. Обозначим $\frac{a+b}{2}=c_1$, $\frac{c+d}{2}=c_2$ и используем уже доказанное в примере 29 неравенство:

$$\frac{c_1+c_2}{2}\geqslant\sqrt{c_1c_2},\quad c_1\geqslant\sqrt{ab},\quad c_2\geqslant\sqrt{cd}.$$

Получим

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{c_1+c_2}{2}\geqslant\sqrt{c_1c_2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd},$$

что и требовалось доказать.

31. Доказать неравенство Коши для трех чисел $a>0$, $b>0$, $c>0$:

$$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}.$$

Решение. Обозначим $d=\frac{a+b+c}{3}$ и применим доказанное неравенство из примера 30:

$$\left(\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}\geqslant\sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}\right).$$

Возведя обе части неравенства в четвертую степень, получим

$$\left(\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4\geqslant abc\frac{a+b+c}{3}\right)\leftrightarrow\left(\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3\geqslant abc\right)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}\right).$$

С помощью неравенства Коши нетрудно доказать неравенство $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3$ (решите самостоятельно).

Доказать (при $a>0$, $b>0$, $c>0$) неравенства:

32. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqslant\frac{9}{a+b+c}$. 33. $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}\geqslant 2$.

34. $8abc\leqslant(a+b)(b+c)(c+a)$. 35. $a^4+b^4\geqslant\frac{1}{8}$, если $a+b=1$.

36. (9.228) $\frac{a^3+b^3}{2}\geqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^3$.

37. Доказать неравенство $a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}$ при условии $b+a=c$, $a>0$, $b>0$.

Решение. Так как $b+a=c$, то $\frac{b}{c}+\frac{a}{c}=1$, откуда

$$0<\frac{b}{c}<1,\quad 0<\frac{a}{c}<1.$$

Учитывая свойства показательной функции ($a^{x_1}>a^{x_2}$ при $x_1<x_2$, $0<a<1$), находим: $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}$, $\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{b}{c}$, откуда $\left(\frac{a}{c}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{b}{c}\right)^{\frac{2}{3}}>\frac{a}{c}+\frac{b}{c}=1$ или

$$a^{\frac{2}{3}}+b^{\frac{2}{3}}>c^{\frac{2}{3}}.$$

**38.** Доказать, что

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2} \text{ при } n>1.$$

Решение. Рассмотрим цепочку неравенств

$$\frac{1}{n+1}>\frac{1}{2n};\ \frac{1}{n+2}>\frac{1}{2n},\ \ldots,\ \frac{1}{2n-1}>\frac{1}{2n}.$$

Складывая левые и правые части этих неравенств, получаем

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>\underbrace{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}}_{n \text{ раз}}=\frac{1}{2}.$$

Доказать (при $a>0$, $b>0$, $c>0$) неравенства:

**39.** $\sqrt[3]{a^4}+\sqrt[3]{b^4}<\sqrt[3]{c^4}$, если $a+b=c$.

**40.** $\begin{cases}a^3+b^3<c^3,\\ a+b>c,\end{cases}$ если $a^2+b^2=c^2$.

**41.** $\frac{x^2}{1+x^4}\leqslant\frac{1}{2}$.

## § 4. Показательные и логарифмические неравенства

Укажем на основные свойства показательных и логарифмических функций в виде равносильных неравенств:

$$(a^x<a^y)\leftrightarrow(x>y),\ 0<a<1; \tag{3}$$

$$(a^x<a^y)\leftrightarrow(x<y),\ a>1; \tag{4}$$

$$(\log_a x<\log_a y)\leftrightarrow\begin{cases}x>y,\\ y>0,\end{cases}\ 0<a<1; \tag{5}$$

$$(\log_a x<\log_a y)\leftrightarrow\begin{cases}x<y,\\ x>0,\end{cases}\ a>1. \tag{6}$$

**42.** Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2}>1$.

Решение. Перепишем исходное неравенство в виде $\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{x+2}>\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{3}$.

На основании свойства (5) получим систему неравенств

$$\left(0<\frac{3x-1}{x+2}<\frac{1}{3}\right)\leftrightarrow\begin{cases}\frac{3x-1}{x+2}>0,\\ \frac{3x-1}{x+2}<\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Решая первое неравенство, получим $x>\frac{1}{3}$ или $x<-2$; решая второе неравенство, получим $-2<x<\frac{5}{8}$. Изображая решения неравенств на числовой прямой (рис. 9), находим решение данного неравенства.

*Ответ:* $x\in\left]\frac{1}{3};\ \frac{5}{8}\right[$.

Рис. 9

**43.** (9.301) Решить неравенство $\log_{x^2-3}729>3$.

Решение. Запишем равносильное неравенство

$$\log_{x^2-3}729>3\log_{x^2-3}(x^2-3).$$

Рассмотрим два случая: а) если $x^2-3>1$, то получим

$$(729>(x^2-3)^3)\leftrightarrow(9^3>(x^2-3)^3)\leftrightarrow(x^2-3<9).$$

Далее, решая систему неравенств, имеем

$$(1<x^2-3<9)\leftrightarrow(4<x^2<12)\leftrightarrow(2<|x|<\sqrt{12})\text{ или}$$
$$x\in]-2\sqrt{3};\ -2[\cup]2;\ 2\sqrt{3}[;$$

б) если $0<x^2-3<1$, имеем неравенство $(729<(x^2-3)^3)\leftrightarrow(x^2-3>9)$. Далее решаем систему неравенств

$$\begin{cases}x^2-3>9,\\ 0<x^2-3<1\end{cases}\Rightarrow(x\in\varnothing).$$

*Ответ:* $x\in]-2\sqrt{3};\ -2[\cup]2;\ 2\sqrt{3}[$.

**44.** Решить неравенство $\log_x\log_3(9^x-7)\geqslant 1$.

Решение. Решая систему неравенств $\begin{cases}x>0,\\ \log_3(9^x-7)>0,\end{cases}$

находим область определения: $x > \log_9 8$. Представим исходное неравенство в виде

$$\log_x \log_3 (9^x - 7) \geqslant \log_x x.$$

Рассмотрим два случая: 1) если $x > 1$, то $(\log_3 (9^x - 7) \geqslant x) \leftrightarrow (9^x - 7 \geqslant 3^x)$. Подстановка $3^x = y$ приводит к неравенству $y^2 - y - 7 \geqslant 0$, решая которое, находим

$$\left[\begin{array}{l} y > \frac{1+\sqrt{29}}{2}, \\ y < \frac{1-\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

Так как $y > 0 (y = 3^x)$, то значение $y < \frac{1-\sqrt{29}}{2}$ не удовлетворяет неравенству. Решая неравенство $3^x > \frac{1+\sqrt{29}}{2}$, получим $x > \log_3 \frac{1+\sqrt{29}}{2}$ (это решение удовлетворяет условию $x > 1$);

2) если $0 < x < 1$, получаем равносильные системы неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x > \log_9 8, \\ 0 < x < 1, \\ 9^x - 7 \leqslant 3^x \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_9 8 < x < 1, \\ \frac{1-\sqrt{29}}{2} < 3^x < \frac{1+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right. \rightarrow$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} \log_9 8 < x < 1, \\ x < \log_3 \frac{1+\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in ]\log_9 8; 1[ \cup ]\log_3 \frac{1+\sqrt{29}}{2}; \infty[$.

Решить неравенства:

**45.** $\log_{\frac{1}{3}} (x^2 + 2x - 1) \leqslant 1$.

**46.** $\log_3 (x^2 - 4x + 3) < 1$.

**47.** $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{4 - 3x} < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2 - x^2}$.

**48.** $\log_{0,5} \left(\log_3 \frac{x^2 - 2x}{x - 3}\right) < 0$.

**49.** $\log_{x^2} (2 + x) < 1$.

**50.** (9.166) Решить неравенство $3^{\lg x + 2} < 3^{\lg x^2 + 5} - 2$.

Решение. Выполним преобразования обеих частей неравенства

$$3^{2+\lg x} < 3^{2(\lg x+2)+1} - 2.$$

Замена $3^{2+\lg x} = y$ приводит к неравенству $y < 3y^2 - 2$. Решение этого неравенства $\left[\begin{array}{l} y > 1, \\ y < -\frac{2}{3}. \end{array}\right.$ Далее имеем

$$(3^{2+\lg x} > 1) \leftrightarrow (3^{2+\lg x} > 3^0) \leftrightarrow (2 + \lg x > 0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\lg x > -2) \leftrightarrow (x > 10^{-2}).$$

Второе неравенство $3^{2+\lg x} < -\frac{2}{3}$ решений не имеет.

*Ответ:* $x \in ]0{,}01; \infty[$.

51. Решить неравенство $(0{,}5)^{\frac{x}{\sqrt{2}}} < 0{,}0625$.

Решение. Выполним преобразования: $(0{,}5)^{\frac{x}{\sqrt{2}}} < (0{,}5)^4$. Так как основание меньше 1, то получим

$$(\sqrt[x]{2} > 4) \leftrightarrow (2^{\frac{1}{x}} > 2^2) \leftrightarrow \left(\frac{1}{x} > 2\right) \leftrightarrow \left(\frac{1-2x}{x} > 0\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(0 < x < \frac{1}{2}\right).$$

*Ответ:* $x \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$.

Решить неравенства:

52. $2^{x^2+3x} > 8 \cdot 2^x$.
53. $4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x$.
54. $(0{,}5)^{x-2} > 6$.
55. $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$.
56. $\log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$.
57. $\log_x (x^2 + 3x - 3) > 1$.
58. $\sqrt{\log_{0,5}(x^2 + 4x - 4)} < 1$.
59. (9.183) $\log_{0,5} \log_2 \log_{x-1} 9 > 0$.

### § 5. Применение различных методов

60. (9.245) Решить неравенство $\log_{0,5} x + \sqrt{1 - 4(\log_{0,5} x)^2} < 1$.

Решение. Обозначим $\log_{0,5} x = y$, получим неравенство $\sqrt{1-4y^2} < 1 - y$. Это неравенство равносильно системе

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - 4y^2 \geqslant 0, \\ 1 - y > 0, \\ 1 - 4y^2 < (1-y)^2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}, \\ y < 1, \\ y(5y - 2) > 0. \end{array}\right.$$

Изображая решения неравенств на числовой прямой (рис. 10), получаем решение системы: $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[ \cup \left]\frac{2}{5};\ \frac{1}{2}\right[$.

Решение исходного неравенства получаем как совокупность решений неравенств

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2} < \log_{0,5} x < 0, \\ \frac{2}{5} < \log_{0,5} x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2} > x > 1, \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{5}} > x > \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left]1;\ \sqrt{2}\right[ \cup \left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ 2^{-0,4}\right[$.

Рис. 10

**61.** (9.248) Решить неравенство $\log_3 (3^x - 1) \log_{\frac{1}{3}} (3^{x+2} - 9) > -3$.

Решение. Выполним преобразования:

$$(-\log_3 (3^x - 1) \log_3 (9 (3^x - 1)) > -3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\log_3 (3^x - 1) (2 + \log_3 (3^x - 1)) < 3).$$

Подстановка $\log_3 (3^x - 1) = y$ приводит к неравенству

$$(y (2 + y) < 3) \Leftrightarrow (y^2 + 2y - 3 < 0) \Rightarrow (-3 < y < 1).$$

Далее решаем систему неравенств

$$(-3 < \log_3 (3^x - 1) < 1) \Leftrightarrow (3^{-3} < 3^x - 1 < 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(1 + \frac{1}{27} < 3^x < 4\right).$$

Логарифмируя все части этого неравенства по основанию 3, получим

$$\log_3 \frac{28}{27} < x < \log_3 4.$$

*Ответ:* $x \in \left]\log_3 \frac{28}{27};\ \log_3 4\right[$.

Приведем некоторые необходимые соотношения:

Неравенство $|f(x)| \leqslant a$, где $a > 0$, равносильно двойному неравенству

$$-a \leqslant f(x) \leqslant a. \qquad (7)$$

Неравенство $|f(x)| \geqslant a$, где $a > 0$, равносильно совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x) \geqslant a, \\ f(x) \leqslant -a. \end{array}\right. \qquad (8)$$

**62.** (9.032) Решить неравенство $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$.

Решение. Рассмотрим равносильные неравенства

$$\left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x + 15 \geqslant 20, \\ 2x^2 - 9x + 15 \leqslant -20 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 9x - 5 \geqslant 0, \\ 2x^2 - 9x + 35 \leqslant 0 \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 5, \\ x < -\frac{1}{2}, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[ \cup ]5; \infty[$.

**63.** (9.033) Решить неравенство $|x^2 - 5x| < 6$.

Решение. Рассмотрим эквивалентную систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{l} x^2 - 5x < 6, \\ x^2 - 5x > -6 \end{array}\right. \leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 - 5x - 6 < 0, \\ x^2 - 5x + 6 > 0. \end{array}\right.$$

Рис. 11

Решение первого неравенства $-1 < x < 6$, а решение второго $\left[\begin{array}{l} x > 3, \\ x < 2. \end{array}\right.$ Изображая полученные множества на числовой прямой, находим решение данного неравенства (рис. 11).

*Ответ:* $x \in ]-1; 2[ \cup ]3; 6[$.

**64.** Решить неравенство $|x - 1| + |2 - x| > 3 + x$.

Рис. 12

Решение. Приравниваем все модули к нулю, полученные корни откладываем на числовой прямой и решаем неравенство в каждом из полученных интервалов (рис. 12):

1) $x \leqslant 1$, тогда $|x - 1| = -(x - 1)$, $|2 - x| = 2 - x$ и решаем равносильные неравенства $(-(x - 1) + 2 - x >$

$> 3 + x) \Rightarrow (3x < 0) \Leftrightarrow (x < 0)$, следовательно, решение удовлетворяет условию $x \leqslant 1$;

2) $1 < x \leqslant 2$, тогда $|x-1| = x-1$, $|2-x| = 2-x$ и получаем $(x-1+2-x > 3+x) \Rightarrow (x < -2)$, т. е. решение находится вне интервала $]1; 2]$, следовательно, в интервале $]1; 2]$ решений нет;

3) $x > 2$, тогда $|x-1| = x-1$, $|2-x| = x-2$. Далее имеем

$$(x-1+x-2 > 3+x) \Leftrightarrow (x > 6).$$

*Ответ*: $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]6; \infty[$.

**65.** (9.251) Решить неравенство $\frac{x^2-|x|-12}{x-3} > 2x$.

Решение. Рассмотрим два случая: 1) если $x > 0$, то $|x| = x$ и получаем неравенство

$$\left(\frac{x^2-x-12}{x-3} - 2x > 0\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2-5x+12}{x-3} < 0\right).$$

Дискриминант числителя меньше нуля, поэтому $x^2-5x+12 > 0$ при всех $x$ и неравенство имеет решение $0 < x < 3$;

2) если $x \leqslant 0$, то $|x| = -x$ и решаем неравенство

$$\left(\frac{x^2+x-12}{x-3} > 2x\right) \Leftrightarrow \left(\frac{(x-3)(x+4)}{x-3} > 2x\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x+4 > 2x) \Leftrightarrow (x < 4).$$

Таким образом, решение неравенства $x \leqslant 0$.

*Ответ*: $x \in ]-\infty; 3[$.

Решить неравенства:

**66.** $x^2 > 2\sqrt{x^2-4x+4}$.

**67.** $\frac{2}{2x+1} > x^2 - \frac{5}{2}x + 2$.

**68.** $x^3 + 2x + 1 < 3\sqrt{x^3-4x+4}$.

**69.** $\log_x(x+3) > 2$.

**70.** $\log_{x^2}(x^2-4x+3) > 1$.

**71.** $x^2 + \frac{x^2}{(x+1)^2} < \frac{5}{4}$.

**72.** $\left|\frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2}\right| < 3$.

**73.** $\log_2 \log_{\frac{1}{3}}(2-x) < 2$.

**74.** $\log_2 \frac{x-3}{x-2} > -1$.

**75.** (9.237) $\log_x \log_2(4^x-3) \leqslant 1$.

ГЛАВА VII

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

## § 1. Основные формулы

### Основные тригонометрические тождества

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z, \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z, \tag{3}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z, \tag{4}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha},\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z, \tag{5}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \sec^2\alpha,\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z, \tag{6}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{cosec}^2\alpha,\ \alpha \neq k\pi,\ k \in Z, \tag{7}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,\ \alpha \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z. \tag{8}$$

### Формулы приведения

| Функция | Аргумент | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $\frac{\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{\pi}{2} + \alpha$ | $\pi - \alpha$ | $\pi + \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} - \alpha$ | $\frac{3\pi}{2} + \alpha$ | $2\pi - \alpha$ | $-\alpha$ |
| sin | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ |
| cos | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\cos\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ |
| tg | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| ctg | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{ctg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ | $-\operatorname{ctg}\alpha$ |

### Формулы сложения

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta, \tag{9}$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta, \tag{10}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta, \tag{11}$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,$$

$$\alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{14}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},\ \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi,$$

$$\alpha+\beta\neq k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{15}$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi,$$

$$\alpha-\beta\neq k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}. \tag{16}$$

### Тригонометрические функции двойного и тройного аргументов

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha, \tag{17}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha, \tag{18}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{19}$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},\ \alpha\neq\frac{k\pi}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{20}$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha, \tag{21}$$

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha, \tag{22}$$

$$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{23}$$

$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}. \tag{24}$$

### Тригонометрические функции половинного аргумента

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \tag{25}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{26}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},\ \alpha\neq\pi(2k+1),\ k\in\boldsymbol{Z}, \tag{27}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq k\pi,\ k\in Z, \tag{28}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\quad \alpha\neq \pi(2k+1),\ k\in Z, \tag{29}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \alpha\neq 2k\pi,\ k\in Z, \tag{30}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\quad \alpha\neq k\pi,\ k\in Z, \tag{31}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}},\quad \alpha\neq 2k\pi,\ k\in Z. \tag{32}$$

**Формулы понижения степени тригонометрических функций**

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}, \tag{33}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}. \tag{34}$$

**Преобразование алгебраической суммы тригонометрических функций в произведение**

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{35}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{36}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{37}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{38}$$

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha, \tag{39}$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha, \tag{40}$$

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z, \tag{41}$$

$$\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in Z, \tag{42}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha\neq k\pi,\ \beta\neq k\pi,\ k\in Z, \tag{43}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\ \alpha \neq k\pi,\ \beta \neq k\pi,\ k \in Z, \quad (44)$$

$$1 + \sin\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right), \quad (45)$$

$$1 - \sin\alpha = 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right). \quad (46)$$

**Преобразование произведения тригонометрических функций в алгебраическую сумму**

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)), \quad (47)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)), \quad (48)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)). \quad (49)$$

**Периодичность тригонометрических функций**

$$\sin\alpha = \sin(\alpha + 2k\pi),\ k \in Z, \quad (50)$$

$$\cos\alpha = \cos(\alpha + 2k\pi),\ k \in Z, \quad (51)$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + k\pi),\ k \in Z, \quad (52)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\alpha + k\pi),\ k \in Z. \quad (53)$$

## § 2. Доказательство тождеств

При решении примеров на доказательство тригонометрических тождеств нужно знать все основные формулы и уметь преобразовывать обе части доказываемого тождества. В отдельных случаях применяются специальные приёмы. Рассмотрим примеры.

1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = 2\operatorname{cosec}2x,\ x \neq \frac{k\pi}{2},\ k \in Z. \quad (54)$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{ctg}x = \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x\cos x} = \frac{1}{\frac{1}{2}\sin 2x} =$$

$$= 2\operatorname{cosec}2x,$$

что и требовалось доказать.

**2.** Доказать тождество

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right). \qquad (55)$$

Решение. Применяя формулу приведения $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ и формулу (35), получаем

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

Тождество доказано. Аналогичным способом можно доказать тождество

$$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right). \qquad (56)$$

**3.** Доказать тождество

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha), \qquad (57)$$

где

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a},\ a > 0,\ b > 0.$$

Решение. Рассмотрим прямоугольный треугольник, катеты которого равны $a$ и $b$ (рис. 13), тогда гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Пусть $\alpha$ — величина угла, прилежащего к катету $a$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$, откуда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Имеем

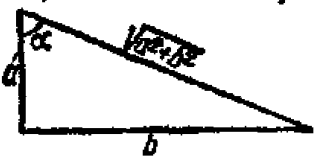


Рис. 13

$$a = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\alpha,\ b = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\alpha.$$

Подставив в левую часть (57), получим

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\cos\alpha\sin x + \sqrt{a^2 + b^2}\sin\alpha\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}(\sin x\cos\alpha + \cos x\sin\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha),$$

что и требовалось доказать.

**4.** (3.017) Доказать тождество $\sin^6\frac{\alpha}{2} - \cos^6\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin^2\alpha - 4}{4}\cos\alpha$.

Решение. Преобразуем левую часть равенства, применяя формулы (33) и (34):

$$\sin^6\frac{\alpha}{2}-\cos^6\frac{\alpha}{2}=\left(\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)^3-\left(\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^3=$$

$$=\left(\frac{1-\cos\alpha}{2}\right)^3-\left(\frac{1+\cos\alpha}{2}\right)^3=$$

$$=\frac{(1-3\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\cos^3\alpha)-(1+3\cos\alpha+3\cos^2\alpha+\cos^3\alpha)}{8}=$$

$$=\frac{-3\cos\alpha-\cos^3\alpha}{4}=-\frac{\cos\alpha}{4}(3+\cos^2\alpha).$$

Применяя формулу (1), имеем

$$-\frac{\cos\alpha}{4}(3+1-\sin^2\alpha)=\frac{\sin^2\alpha-4}{4}\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

5. (3.025) Доказать тождество $\frac{\sin 4\alpha}{1+\cos 4\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=$ $=\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$.

Решение. Применим формулу приведения $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\right.$ $\left.-\alpha\right)=\operatorname{tg}\alpha$ и формулы (39) и (17):

$$\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}\cdot\frac{\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha,$$

что и требовалось доказать.

6. (3.151) Доказать тождество $1-2\sin 50^\circ=\frac{1}{2}\sec 160^\circ$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\frac{1}{2}\sec 160^\circ=\frac{1}{2\cos 160^\circ}=\frac{1}{2\cos(180^\circ-20^\circ)}=\frac{1}{-2\cos 20^\circ}.$$

Умножим и разделим на $\cos 20^\circ$ левую часть равенства:

$$\frac{\cos 20^\circ(1-2\sin 50^\circ)}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-2\sin 50^\circ\cos 20^\circ}{\cos 20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos 20^\circ-(\sin 70^\circ+\sin 30^\circ)}{\cos 20^\circ}=\frac{\cos 20^\circ-\sin 70^\circ-0{,}5}{\cos 20^\circ}.$$

Так как $\sin 70^\circ=\cos(90^\circ-70^\circ)=\cos 20^\circ$, то имеем

$$-\frac{1}{2\cos 20^\circ}=-\frac{1}{2\cos 20^\circ}.$$

7. (3.186) Доказать тождество $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$, $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}$, $k\in Z$.

Решение. Представим единицу, стоящую в числителе, в виде $1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2$, а единицу в знаменателе — в виде $1=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3$, тогда получим

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^3}=$$
$$=\frac{-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{-3\sin^2\alpha\cos^4\alpha-3\sin^4\alpha\cos^2\alpha}=$$
$$=\frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cos^2\alpha(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=\frac{2}{3},$$

что и требовалось доказать.

8. (3.187) Доказать тождество $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$.

Решение. Преобразуем произведение функций в сумму, применяя формулу (49):

$$4\cdot\frac{1}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha+\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha-\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right)=$$
$$=2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)+\sin\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right).$$

Умножим и разделим полученное выражение на $\sin\alpha$ и преобразуем:

$$\frac{2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\sin\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos 2\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 3\alpha-\sin\alpha+\sin\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha},$$

что и требовалось доказать.

Доказать тождества:

9. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$, $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$.

10. $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

11. $2\cos x+3\sin x=\sqrt{13}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right)$.

12. $\sin 14\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha-\sin 16\alpha=$
$=4\sin\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{21\alpha}{2}\sin\alpha$.

13. $1+\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\alpha(\operatorname{ctg}\alpha+$ $+\operatorname{tg}\alpha)$, $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$.

14. $\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}=-\frac{1}{4}\sin^2\alpha$, $\alpha\neq n\pi$.

15. $\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 4\alpha\sin\alpha=\cos 3\alpha\cos 2\alpha$.

16. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{2}{\cos\alpha}$, $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+n\pi$.

17. Доказать тождество $\sec 2\alpha+\operatorname{ctg}\left(\frac{5\pi}{2}+2\alpha\right)=$ $=\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)$ при $\alpha\neq\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}$.

Решение. Используя формулы приведения, имеем

$$\left(\sec 2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\rightarrow\left(\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right).$$

Применяя формулу (28) и формулы приведения, получим

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Тождество доказано.

18. Доказать тождество $\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=$ $=\frac{1}{4}\sin 3\alpha$.

Решение. Применяя формулы (48) и (49), получим

$$\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\sin\alpha\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\sin 3\alpha-\sin\alpha)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\sin\alpha\right)=\frac{1}{4}\sin 3\alpha,$$

что и требовалось доказать.

19. (3.221) Доказать тождество $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha-2\operatorname{tg}2\alpha-$ $-4\operatorname{tg}4\alpha=8\operatorname{ctg}8\alpha$ при $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$.

Решение. Применяя формулу $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = 2\operatorname{ctg}2\alpha$ к левой части равенства, получим

$$2\operatorname{ctg}2\alpha - 2\operatorname{tg}2\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 2(\operatorname{ctg}2\alpha - \operatorname{tg}2\alpha) - 4\operatorname{tg}4\alpha =$$
$$= 2 \cdot 2\operatorname{ctg}4\alpha - 4\operatorname{tg}4\alpha = 4(\operatorname{ctg}4\alpha - \operatorname{tg}4\alpha) = 4 \cdot 2\operatorname{ctg}8\alpha,$$

что и требовалось доказать.

20. (3.229) Доказать тождество

$$\frac{2\sin^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)} = -1 \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.$$

Решение. Преобразуем знаменатель, применяя формулы приведения и формулу (17):

$$2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos^2\left(\frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\right) =$$
$$= 2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) =$$
$$= \sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\alpha\right) = \cos 2\alpha.$$

Далее доказываем тождество $\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = -1$. Имеем

$$\frac{2\sin^2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = \frac{1 - \cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha} = -1.$$

21. Доказать тождество $3 + 4\cos 4\alpha + \cos 8\alpha = 8\cos^4 2\alpha$.

Решение. Применяя формулу (39) к левой части равенства, получим

$$3 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha - 1 = 2 + 4\cos 4\alpha + 2\cos^2 4\alpha =$$
$$= 2(1 + \cos 4\alpha)^2 = 2(2\cos^2 2\alpha)^2 = 8\cos^4 2\alpha.$$

Тождество доказано.

22. (3.224) Доказать тождество

$$\sin^2\varphi - \cos^2(\alpha - \varphi) + 2\cos\alpha\cos\varphi\cos(\alpha - \varphi) = \cos^2\alpha.$$

Решение. Преобразуем левую часть равенства, применяя формулы (34), (11), (12) и вынося $\cos(\alpha - \varphi)$ за скобки:

$$\frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \cos(\alpha - \varphi)(-\cos(\alpha - \varphi) + 2\cos\alpha\cos\varphi) =$$
$$= \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \cos(\alpha - \varphi)(-\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi +$$
$$+ 2\cos\alpha\cos\varphi) = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} + \cos(\alpha - \varphi)\cos(\alpha + \varphi).$$

Используя формулу (34), имеем

$$\frac{1-\cos 2\varphi}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\varphi)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)=\cos^2\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Доказать тождества:

23. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\cos\frac{5\pi}{12}\sin\left(\frac{5\pi}{12}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha.$

24. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\operatorname{tg}3\alpha,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1).$

25. $1+\sec 20^\circ=\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}40^\circ.$

26. $\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)=1.$

27. $\sin 3\alpha\operatorname{cosec}\alpha-\cos 3\alpha\sec\alpha=2.$

28. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=\frac{1}{4}(1+3\cos^2 2\alpha).$

29. $\operatorname{tg}3x-\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}x\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}3x.$

30. $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}.$

31. $4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos 3\alpha.$

32. $4\sin\alpha\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\sin 3\alpha.$

33. $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec^2\beta=\operatorname{tg}^2\beta+\sec^2\alpha.$

34. $2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$

При доказательстве некоторых тождеств применяем специальные приемы. Покажем это на примерах.

35. Доказать тождество $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}.$

Решение. Умножим и разделим левую часть равенства на $\sin 20^\circ$, а затем применим формулу $\frac{1}{2}\sin 2\alpha=\sin\alpha\cos\alpha$:

$$\frac{\sin 20^\circ\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=\frac{\frac{1}{2}\sin 40^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ}{\sin 20^\circ}=$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\sin 80^\circ \cos 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin (180^\circ - 20^\circ)}{\sin 20^\circ} =$$
$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

36. Доказать тождество $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -\frac{1}{2}$.

Решение. Умножим и разделим левую часть равенства на $2\sin\frac{2\pi}{7}$ и преобразуем все произведения в суммы:

$$\frac{2\sin\frac{2\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\sin\frac{4\pi}{7} + \left(\sin\frac{6\pi}{7} - \sin\frac{2\pi}{7}\right)}{2\sin\frac{2\pi}{7}} +$$
$$+ \frac{\sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = \frac{\left(\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7}\right) - \sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}}.$$

Используя формулу (28), получим

$$\sin\frac{6\pi}{7} + \sin\frac{8\pi}{7} = 2\sin\pi\cos\frac{\pi}{7} = 0.$$

Тогда

$$-\frac{\sin\frac{2\pi}{7}}{2\sin\frac{2\pi}{7}} = -\frac{1}{2}.$$

Тождество доказано.

37. Доказать равенство $\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = 1$ при условии, что $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.

Решение. Сгруппируем слагаемые в левой части равенства:

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}.$$

По условию $\hat{B} = 180° - (\hat{A} + \hat{C})$, поэтому

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2} = \operatorname{tg}\left(90° - \left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\left(\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{C}}{2}\right)} = \left(1 - \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\right) : \left(\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\right).$$

Подставляя это в левую часть доказываемого равенства, получим

$$\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\right) + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} =$$

$$= 1 - \operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2} + \operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2} = 1.$$

**38.** Доказать тождество

$$8\cos^4\alpha + 4\cos^3\alpha - 8\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 1 = 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha) + (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha) + 1 =$$
$$= 8\cos^2\alpha(-\sin^2\alpha) + \cos 3\alpha + 1 = -2\sin^2 2\alpha + 1 +$$
$$+ \cos 3\alpha = \cos 4\alpha + \cos 3\alpha = 2\cos\frac{7\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

что и требовалось доказать.

**39.** Доказать, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$ при условии

$$\sin(2\alpha + \beta) = 2\sin\beta.$$

Решение. Преобразуем обе части данного условия, применяя формулы (9) и (10):

$$(\sin(2\alpha + \beta) = 2\sin\beta) \leftrightarrow (\sin((\alpha + \beta) + \alpha) =$$
$$= 2\sin((\alpha + \beta) - \alpha)) \leftrightarrow (\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha +$$
$$+ \cos(\alpha + \beta)\sin\alpha = 2\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha -$$
$$- 2\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha) \leftrightarrow (\sin(\alpha + \beta)\cos\alpha =$$
$$= 3\cos(\alpha + \beta)\sin\alpha).$$

Разделим обе части полученного равенства на $\cos(\alpha + \beta)\cos\alpha \neq 0$, получим $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$, что и требовалось доказать.

Доказать тождества:

40. $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}=1.$

41. $\cos 70^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=2\cos^2 35^\circ.$

42. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

43. $1-3\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\cos^2\alpha}.$

44. $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}.$

45. $2\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-1=\cos 2\alpha\cos 2\beta.$

46. $\sin\alpha\left(1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)=\operatorname{tg}\alpha.$

47. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+8\operatorname{ctg}8\alpha=\operatorname{ctg}\alpha.$

48. $\dfrac{\sin 3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha.$

49. $\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\sin^2\alpha.$

50. (3.005) Доказать тождество

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 6\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha}{2}\cos 4\alpha.$$

Решение. В левой части равенства сгруппируем слагаемые и применим формулу (37):

$$(\cos\alpha+\cos 7\alpha)+(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)=2\cos 4\alpha\cos 3\alpha+$$
$$+2\cos 4\alpha\cos 2\alpha=2\cos 4\alpha\cdot 2\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=$$
$$=4\cos 4\alpha\cos\frac{5\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

51. Доказать тождество $\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ=2+\sqrt{3}.$

Решение. Преобразуем левую часть равенства, применяя формулы (48) и (47):

$$\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}65^\circ=\frac{\sin 5^\circ\sin 55^\circ\sin 65^\circ}{\cos 5^\circ\cos 55^\circ\cos 65^\circ}=$$
$$=\frac{\sin 5^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos 10^\circ-\cos 120^\circ)}{\cos 5^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos 10^\circ+\cos 120^\circ)}=\frac{\sin 5^\circ\left(\cos 10^\circ+\frac{1}{2}\right)}{\cos 5^\circ\left(\cos 10^\circ-\frac{1}{2}\right)}=$$

$$= \frac{\sin 5^\circ \cos 10^\circ + \frac{1}{2}\sin 5^\circ}{\cos 5^\circ \cos 10^\circ - \frac{1}{2}\cos 5^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 15^\circ - \sin 5^\circ) + \frac{1}{2}\sin 5^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ + \cos 5^\circ) - \frac{1}{2}\cos 5^\circ} =$$

$$= \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Тождество доказано.

Доказать тождества:

52. $\frac{1+\cos\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{1+\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.

53. $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$.

54. $\frac{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}} = 3\operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{ctg}\alpha$.

55. $(\sin 2\alpha + \sin 4\alpha)^2 + (\cos 2\alpha + \cos 4\alpha)^2 = 4\cos^2\alpha$.

56. $\frac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \operatorname{tg}^4\alpha$.

57. $1 - \sin^2(\alpha+\beta) - \sin^2(\alpha-\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta$.

58. $\frac{\cos^3\alpha - \sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cos\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha$.

59. $2\sqrt{3}\sin\alpha\cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha + \beta\right) + \cos\left(\alpha+\beta-\right.$

$\left.-\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha + \beta\right) - \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha - \beta\right)$.

60. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma - \sin(\alpha+\beta+\gamma) = 4\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \times$

$\times \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$.

61. $\frac{(\sqrt{2} - \cos\alpha - \sin\alpha)\sin^2\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha} = 2\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\alpha}{2}\right) \times$

$\times \sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

62. $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \operatorname{tg}\alpha = 1$. 63. $\frac{\sin 4\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} = 2\sin 2\alpha$.

64. $2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1 = 2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

65. $\frac{\sin 3\alpha + \cos\alpha - \cos 5\alpha}{\sin 5\alpha + \cos 3\alpha - \cos 7\alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 5\alpha}$.

66. $4\sin 18^\circ \sin 306^\circ = -1$.

67. $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}$.

68. $\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 40^\circ + \sqrt{3} \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ = \sqrt{3}$.

69. $\sin\alpha \sin 3\alpha = \sin^2 2\alpha - \sin^2\alpha$.

70. (3.410) $\sin^3 2\alpha \cos 6\alpha + \cos^3 2\alpha \sin 6\alpha = \frac{3}{4}\sin 8\alpha$.

## § 3. Упрощения тригонометрических выражений

71. (3.079) Упростить $\frac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha}$.

Решение. Выполним преобразования в числителе:

$$1 + \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha \sin\alpha + \cos 2\alpha \cos\alpha}{\sin 2\alpha \sin\alpha} = \frac{\cos(2\alpha - \alpha)}{\sin 2\alpha \sin\alpha}.$$

Знаменатель дроби $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$. Окончательно имеем

$$\frac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha \sin\alpha} : \frac{2}{\sin 2\alpha} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\alpha$.

72. (3.413) Упростить $\sin^3\alpha \cos 3\alpha + \cos^3\alpha \sin 3\alpha$.

Решение. Выполним преобразования:

$$\sin^3\alpha \cos 3\alpha + \cos^3\alpha \sin 3\alpha = \sin^2\alpha (\sin\alpha \cos 3\alpha) + \cos^2\alpha \times$$

$$\times (\cos\alpha \sin 3\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)\frac{1}{2}(\sin 4\alpha - \sin 2\alpha) +$$

$$+ \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}(\sin 4\alpha + \sin 2\alpha) = \frac{1}{4}(2\sin 4\alpha + 2\cos 2\alpha \times$$

$$\times \sin 2\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha.$$

*Ответ:* $\frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

73. Преобразовать в произведение $3 - 4\cos^2\alpha$.

Решение. Имеем

$$3 - 4\cos^2\alpha = 3 - 4\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = 1 - 2\cos 2\alpha = 2\left(\frac{1}{2} - \right.$$

$$\left. - \cos 2\alpha\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right) = 2 \cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right) \times$$

$$\times \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right).$$

*Ответ:* $4\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

74. Упростить $\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4} - \alpha\right)(1 + \sin 2\alpha)$.

Решение. Применяя формулу приведения, получаем

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha)=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)(1+\sin 2\alpha).$$

По формуле (29)

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}(1+\sin 2\alpha)=\cos 2\alpha.$$

*Ответ:* $\cos 2\alpha$.

75. (3.286) Упростить $\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-2\cos^2 2\alpha$.

Решение. Применяя формулы (39) и (16), получим

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha+1-(1+\cos 4\alpha)=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha=$$

$$=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha=\frac{\cos\frac{\pi}{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$$

Упростить выражения:

76. $2-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha$.

77. $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)$.

78. $\frac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}\cdot\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$.

79. $\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$.

80. $\sin 3\alpha\sin^3\alpha+\cos 3\alpha\cos^3\alpha$.

81. $\sin^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

82. $\operatorname{ctg}^2 2\alpha-\operatorname{tg}^2 2\alpha-4\sin 4\alpha\operatorname{ctg}4\alpha$.

▼ 83. (3.366) Вычислить $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

Решение. Раскладывая $\sin^3\alpha - \cos^3\alpha$ как разность кубов и преобразуя, получим

$$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = (\sin\alpha - \cos\alpha)(\sin^2\alpha + \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = n(1 + \sin\alpha\cos\alpha).$$

Возводя в квадрат обе части равенства $\sin\alpha - \cos\alpha = n$, имеем

$$(\sin^2\alpha - 2\cos\alpha\sin\alpha + \cos^2\alpha = n^2) \leftrightarrow (1 - 2\cos\alpha\sin\alpha = n^2) \leftrightarrow \left(\cos\alpha\sin\alpha = \frac{1-n^2}{2}\right).$$

Окончательно получим

$$\sin^3\alpha - \cos^3\alpha = n\left(1 + \frac{1-n^2}{2}\right) = \frac{1}{2}(3 - n^2)n.$$

*Ответ:* $\frac{1}{2}n(3-n^2)$.

84. Вычислить $\frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

Решение. Так как по условию $\operatorname{tg}\alpha = 2$, то имеем

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 2\right) \leftrightarrow (\sin\alpha = 2\cos\alpha),\ (\sec^2\alpha = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 5) \leftrightarrow \left(\cos^2\alpha = \frac{1}{5}\right).$$

Далее получаем

$$\frac{8\cos^3\alpha - 2\sin^3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha - \sin^3\alpha} = \frac{\cos\alpha - 8\cos^3\alpha}{2\cos\alpha - 8\cos^3\alpha} = \frac{1 - 8\cos^2\alpha}{2(1 - 4\cos^2\alpha)} = -1{,}5.$$

*Ответ:* $-1{,}5$.

85. Найти значения всех тригонометрических функций угла $\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Так как угол $\alpha$ — во второй четверти, то $\sin\alpha > 0$, $\operatorname{cosec}\alpha > 0$, $\operatorname{tg}\alpha < 0$, $\operatorname{ctg}\alpha < 0$, $\sec\alpha < 0$. Применяя формулы (1) — (8), находим

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \frac{5}{13};\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{13}{5};\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{12}{5};\ \sec\alpha = -\frac{13}{12}.$$

**86.** Найти значения всех тригонометрических функций угла $\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Решение. По формуле (6) $\sec\alpha = -\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ (так как $\sec\alpha < 0$),

$$\sec\alpha = -\frac{5}{4};\ \cos\alpha = -\frac{4}{5};\ \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3};\ \operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{3}.$$

Вычислить:

**87.** $\cos 15°$; $\sin 75°$; $\operatorname{ctg} 105°$.

**88.** (3.355) $\sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

**89.** $\operatorname{tg} 1° \operatorname{tg} 2° \operatorname{tg} 3° \ldots \operatorname{tg} 89°$.

Найти значения тригонометрических функций угла $\alpha$, если:

**90.** $\sin 2\alpha = -\frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

**91.** $\operatorname{ctg}\alpha = 3$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

**92.** $\cos\frac{\alpha}{2} = 0{,}6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

**93.** $\sec\alpha = 2{,}5$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Преобразовать в произведение:

**94.** (3.244) $\sin^2 2\alpha + \sin^2\beta + \cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

**95.** $\frac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha} - \sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4}$.

**96.** (3.256) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{\operatorname{tg}^2\left(2\alpha - \frac{5\pi}{4}\right) + 1}$.

**97.** (3.243) $(-\operatorname{tg} 4\alpha\cos 8\alpha + \sin 8\alpha)(\operatorname{ctg} 4\alpha\cos 8\alpha + \sin 8\alpha)$.

**98.** (3.299) $2 - \dfrac{\sin 4\alpha}{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha}$.

Доказать тождества (при условии, что $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$):

**99.** (3.368) $\sin\hat{A}+\sin\hat{B}+\sin\hat{C}=4\cos\frac{\hat{A}}{2}\cos\frac{\hat{B}}{2}\cos\frac{\hat{C}}{2}$.

**100.** (3.371) $\frac{\sin\hat{C}}{\cos\hat{A}\cos\hat{B}}=\operatorname{tg}\hat{A}+\operatorname{tg}\hat{B}$.

**101.** $\sin^2\hat{A}+\sin^2\hat{B}+\sin^2\hat{C}-2\cos\hat{A}\cos\hat{B}\cos\hat{C}=2$.

**102.** (3.472) $\sin(2n+1)\hat{A}+\sin(2n+1)\hat{B}+\sin(2n+1)\hat{C}=(-1)^n 4\cos\left(\frac{2n+1}{2}\hat{A}\right)\cos\left(\frac{2n+1}{2}\hat{B}\right)\times\cos\left(\frac{2n+1}{2}\hat{C}\right)$, где $n\in N$.

**103.** Доказать, что $\operatorname{tg}(2\alpha-\beta)\operatorname{ctg}(2\alpha+\beta)=\frac{1}{5}$, если $\sin 4\alpha=\frac{3}{2}\sin 2\beta$

## § 4. Преобразования с обратными тригонометрическими функциями

Приведём основные соотношения:

Если $y=\arcsin x$, то $\sin y=x$, где $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$; $|x|\leqslant 1$,

$$\arcsin(-x)=-\arcsin x. \tag{44}$$

Если $y=\arccos x$, то $\cos y=x$, где $0\leqslant y\leqslant\pi$; $|x|\leqslant 1$,

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x. \tag{45}$$

Если $y=\operatorname{arctg} x$, то $\operatorname{tg} y=x$, где $-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$, $x$ — любое действительное число,

$$\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg} x. \tag{46}$$

Если $y=\operatorname{arcctg} x$, то $\operatorname{ctg} y=x$, причем $0<y<\pi$, $x$ — любое действительное число,

$$\operatorname{arcctg}(-x)=\pi-\operatorname{arcctg} x. \tag{47}$$

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x,\ |x|\leqslant 1. \tag{48}$$

$$\operatorname{arcctg} x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x},\ x\neq 0. \tag{49}$$

$$\arcsin x=\arccos\sqrt{1-x^2},\ |x|\leqslant 1. \tag{50}$$

Следует отметить, что все примеры на упрощение, содержащие обратные тригонометрические функции, приводятся к примерам с обычными тригонометрическими функциями.

**104.** Вычислить $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$.

Решение. По формуле приведения $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 2 \times \right.$ $\left. \times \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) = -\cos\left(2\operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right)$. Обозначим $\operatorname{arctg}\frac{4}{3} = \alpha$, тогда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Чтобы вычислить $-\cos 2\alpha$, используем формулу $\cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$:

$$-\cos 2\alpha = -\frac{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{7}{25}.$$

*Ответ:* $\frac{7}{25}$.

**105.** Доказать, что $\arccos\frac{7}{\sqrt{50}} + 2\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$.

Решение. Обозначим $\arccos\frac{7}{\sqrt{50}} = \alpha$, $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \beta$, тогда

$$\cos\alpha = \frac{7}{\sqrt{50}},\ \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}.$$

Нужно доказать, что $\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{4}$, или $2\beta = \frac{\pi}{4} - \alpha$. Так как $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{4}$, то $0 < 2\beta < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, углы $2\beta$ и $\frac{\pi}{4} - \alpha$ находятся в первой четверти, и для доказательства их равенства достаточно доказать, что $\operatorname{tg}2\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. Имеем

$$\operatorname{tg}2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha} =$$

$$= \frac{\sqrt{1-\frac{49}{50}}}{\frac{7}{\sqrt{50}}} = \frac{1}{7};$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) = \frac{1-\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7}} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, $\operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

**106.** Вычислить $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{4}{5} - 2\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

**Решение.** Обозначим $\arcsin\frac{4}{5} = \alpha$, $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right) = \beta$, тогда $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = -\frac{1}{2}$. По определению $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$. Находим $\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \sin\frac{\alpha}{2} \times \cos 2\beta - \cos\frac{\alpha}{2}\sin 2\beta$. Далее имеем

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}};\ \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{3}{5};\ \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{5}};\ \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}};\ \operatorname{tg}\beta = -2;$$

$$\cos 2\beta = \frac{1-\operatorname{tg}^2\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = -\frac{3}{5};\ \sin 2\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}^2\beta} = -\frac{4}{5}.$$

Окончательно получаем

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2} - 2\beta\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{5}\right) - \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{\sqrt{5}}$

Вычислить:

**107.** $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}\frac{2}{11}\right)$.

**108.** $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arcctg}\sqrt{3} + \operatorname{arcctg}(2+\sqrt{3})\right)$.

**109.** $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{5}{13} + \arcsin\frac{12}{13}\right)$.

Доказать тождества:

110. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{4}$.

111. $2\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}\frac{3}{4}=\frac{\pi}{2}$.

112. $\sin\left(3\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\arcsin\sqrt{\frac{135}{16}}\right)=1$.

ГЛАВА VIII

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

## § 1. Простейшие уравнения

*Уравнение вида* $\sin x=a$, где $|a|\leqslant 1$, имеет решение

$$x=(-1)^n\arcsin a+n\pi. \tag{1}$$

В дальнейшем будем предполагать, что $n\in Z$, $k\in Z$, $m\in Z$. Частные случаи:

$$(\sin x=0)\Leftrightarrow(x=k\pi), \tag{2}$$

$$(\sin x=1)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{2}+2n\pi\right), \tag{3}$$

$$(\sin x=-1)\Leftrightarrow\left(x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi\right). \tag{4}$$

*Уравнение вида* $\cos x=a$, $|a|\leqslant 1$, имеет решение

$$x=\pm\arccos a+2n\pi, \tag{5}$$

$$(\cos x=0)\Leftrightarrow\left(x=\frac{\pi}{2}+n\pi\right), \tag{6}$$

$$(\cos x=1)\Leftrightarrow(x=2n\pi), \tag{7}$$

$$(\cos x=-1)\Leftrightarrow(x=\pi+2n\pi). \tag{8}$$

Если $|a|>1$, то уравнения (1) и (5) не имеют решений. Многие уравнения путём простых преобразований приводятся к виду (1) — (8). Например, решим уравнение вида

$$\sin ax=\sin bx. \tag{9}$$

Выполним преобразования:

$$(\sin ax-\sin bx=0)\Leftrightarrow\left(2\sin\frac{ax-bx}{2}\cos\frac{ax+bx}{2}=0\right)\Leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{(a-b)x}{2}=0, \\ \cos\dfrac{(a+b)x}{2}=0 \end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{(a-b)x}{2}=n\pi, \\ \dfrac{(a+b)x}{2}=\dfrac{\pi}{2}+k\pi \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2n\pi}{a-b}, \\ x=\dfrac{\pi(2k+1)}{a+b}. \end{array}\right.$$

Аналогично решаются уравнения вида

$$\cos ax = \cos bx. \tag{10}$$

*Уравнения вида* $\sin ax = \cos bx$ приводятся к виду (9), используя формулу приведения $\cos bx = \sin\left(\frac{\pi}{2} - bx\right)$.

*Уравнения вида* $\operatorname{tg} x = a$ и $\operatorname{ctg} x = a$ имеют соответственно решения:

$$x = \operatorname{arctg} a + n\pi, \tag{11}$$

$$x = \operatorname{arcctg} a + n\pi. \tag{12}$$

Частные случаи:

$$(\operatorname{tg} x = 0) \leftrightarrow (x = n\pi), \tag{13}$$

$$(\operatorname{ctg} x = 0) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right), \tag{14}$$

$$(\operatorname{tg} x = 1) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + n\pi\right). \tag{15}$$

Наибольшее количество ошибок бывает при решении уравнений вида

$$\cos x = -b, \quad 0 < b < 1. \tag{16}$$

Решение имеет вид $x = \pm \arccos(-b) + 2n\pi$, где $\arccos(-b)$ — угол, находящийся во второй четверти, поэтому

$$\arccos(-b) = \pi - \arccos b.$$

Таким образом,

$$(\cos x = -b) \leftrightarrow (x = \pm(\pi - \arccos b) + 2n\pi).$$

Например, уравнение $\cos x = -\frac{1}{2}$ имеет решение

$$x = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2n\pi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi.$$

*Уравнение вида*

$$\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg} bx \tag{17}$$

приводится к простейшему таким образом:

$$(\operatorname{tg} ax - \operatorname{tg} bx = 0) \leftrightarrow \left(\frac{\sin(ax-bx)}{\cos ax \cos bx} = 0\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} (a-b)x = n\pi, \\ \cos ax \neq 0, \\ \cos bx \neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{n\pi}{a-b}, \\ \cos ax \neq 0, \\ \cos bx \neq 0. \end{cases}$$

К уравнениям вида (17) приводятся также и уравнения

$$(\operatorname{tg} ax = \operatorname{ctg} bx) \leftrightarrow \left(\operatorname{tg} ax = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - bx\right)\right).$$

## § 2. Приведение к простейшим уравнениям

Рассмотрим несколько тригонометрических уравнений, которые путем простых преобразований приводятся к простейшим уравнениям.

1. (8.140) Решить уравнение $\operatorname{tg}(x - 15^\circ)\operatorname{ctg}(x + 15^\circ) = \frac{1}{3}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\sin(x-15^\circ)\cos(x+15^\circ)}{\cos(x-15^\circ)\sin(x+15^\circ)} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 2x - \sin 30^\circ)}{\frac{1}{2}(\sin 2x + \sin 30^\circ)} = \frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1}.$$

Далее решаем уравнение

$$\left(\frac{2\sin 2x - 1}{2\sin 2x + 1} = \frac{1}{3}\right) \leftrightarrow (6\sin 2x - 3 = 2\sin 2x + 1) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\sin 2x = 1) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + n\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi\right\}$.

2. (8.182) Решить уравнение $\sin^3 z \cos z - \sin z \cos^3 z = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sin z \cos z(\sin^2 z - \cos^2 z) = \frac{1}{2}\sin 2z(-\cos 2z) = -\frac{1}{4}\sin 4z.$$

Затем решаем простейшее уравнение:

$$\left(-\frac{1}{4}\sin 4z = \frac{\sqrt{2}}{8}\right) \leftrightarrow \left(\sin 4z = -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow \left(4z = \left(-\frac{\pi}{4}\right) \times (-1)^n + n\pi\right).$$

*Ответ:* $z \in \left\{\frac{\pi}{16}(-1)^{n+1} + \frac{n\pi}{4}\right\}$.

**3.** Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = \frac{3}{2}$.

Решение. Применяя формулу понижения степени, получаем

$$\left(\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 4x}{2} + \frac{1-\cos 6x}{2} = \frac{3}{2}\right) \leftrightarrow (\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 0) \leftrightarrow (2\cos 4x \cos 2x + \cos 4x = 0) \leftrightarrow (\cos 4x (2\cos 2x + 1) = 0).$$

Далее решаем уравнения

$$(\cos 4x = 0) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}\right);$$

$$(2\cos 2x = -1) \leftrightarrow \left(\cos 2x = -\frac{1}{2}\right) \leftrightarrow \left(2x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2n\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{n\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3} + n\pi\right\}$.

**4.** (8.019) Решить уравнение

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2} - \sin x \sin 3x - \sin 2x \sin 3x = 0.$$

Решение. Преобразуем все произведения в суммы:

$$\left(\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos x) - \frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) - \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x) = 0\right) \rightarrow (\cos 4x + \cos 5x = 0).$$

Преобразуем сумму косинусов в произведение:

$$(\cos 4x + \cos 5x = 0) \leftrightarrow \left(2\cos\frac{9x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0\right).$$

Далее решаем уравнения

$$\left(\cos\frac{9x}{2} = 0\right) \leftrightarrow \left(\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} + n\pi\right) \leftrightarrow \left(x = \frac{1}{9}(2n+1)\pi\right);$$

$$\left(\cos\frac{x}{2} = 0\right) \leftrightarrow (x = \pi(2n+1)).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{9}(2n+1),\ \pi(2n+1)\right\}$.

5. (8.011) Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+2x\right)\operatorname{ctg}3x+\sin(\pi+2x)-\sqrt{2}\cos 5x=0.$$

Решение. Выполним преобразования:

$$\left(\cos 2x\frac{\cos 3x}{\sin 3x}-\sin 2x-\sqrt{2}\cos 5x=0\right)\leftrightarrow(\cos 2x\cos 3x-$$

$$-\sin 2x\sin 3x-\sqrt{2}\cos 5x\sin 3x=0)\leftrightarrow(\cos 5x-\sqrt{2}\times$$

$$\times\cos 5x\sin 3x=0)\leftrightarrow(\cos 5x(1-\sqrt{2}\sin 3x)=0)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\cos 5x=0,\\ \sin 3x=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{10}(2n+1),\\ 3x=(-1)^n\frac{\pi}{4}+n\pi.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{\pi}{10}(2n+1);\ (-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{3}\right\}$.

6. Решить уравнение $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}\sin 3x$.

Решение. Рассмотрим равносильные уравнения:

$$\left(\sqrt{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin 3x\right)\leftrightarrow\left(\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-\right.$$

$$\left.-\sin 3x=0\right)\leftrightarrow\left(2\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}\right)=0,\\ \cos\left(\frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)=0\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{8}-\frac{x}{2}=n\pi,\\ \frac{5x}{2}+\frac{\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+n\pi\end{array}\right.\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}-2n\pi,\\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{\pi}{4}-2n\pi;\ \frac{3\pi}{20}+\frac{2n\pi}{5}\right\}$.

Решить уравнения:

7. $\operatorname{tg}^2x-3\operatorname{tg}x+2=0$. 8. $\sin x+\cos x=1$.
9. $\cos 3x=\cos x$. 10. $\sin 3x\sin 7x=\sin x\sin 9x$.
11. $\sin 5x\cos 3x=\sin 9x\cos 7x$.
12. $\sin 5x+\sin 3x=\sin 4x$.
13. $7\operatorname{tg}x-4\operatorname{ctg}x=12$. 14. $3\sin x=2\cos^2x$.
15. $\sin^2x+\cos^2 2x+\sin^2 3x=\frac{3}{2}$.
16. $2(1+\cos 2x)^{-1}=3\operatorname{tg}^2x-1$.
17. $\operatorname{tg}\frac{t}{2}\operatorname{ctg}\frac{3t}{2}+\sec\frac{t}{2}\operatorname{cosec}\frac{3t}{2}=1$.

## § 3. Однородные уравнения

*Однородными тригонометрическими уравнениями* будем называть уравнения вида

$$a_0 \cos^n x + a_1 \cos^{n-1} x \sin x + \ldots + a_{n-1} \cos x \sin^{n-1} x + a_n \sin^n x = 0,$$

т. е. уравнения, в которых у всех слагаемых сумма показателей одинакова. Приведём примеры.

18. (8.083) Решить уравнение $\sin^2 x - 2 \sin x \cos x - 3\cos^2 x = 0$.

Решение. Проверяем, будут ли решения уравнения $\cos^2 x = 0$ решениями исходного уравнения, учитывая, что $\sin x$ и $\cos x$ одновременно не могут равняться нулю. В данном примере $\cos x \neq 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$(\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 3, \\ \operatorname{tg} x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 3 + n\pi, \\ x = -\frac{\pi}{4} + n\pi. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + n\pi;\ \operatorname{arctg} 3 + n\pi\right\}$.

19. (8.081) Решить уравнение $6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x = 2$.

Решение. Это уравнение не является однородным, но его можно привести к однородному, если правую часть представить в виде

$$2(\sin^2 x + \cos^2 x).$$

Получим цепочку равносильных уравнений

$$(6 \sin^2 x + \sin x \cos x - \cos^2 x - 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (4 \sin^2 x + \sin x \cos x - 3 \cos^2 x = 0).$$

Это уравнение решаем аналогично уравнению, рассмотренному в примере 18, так как $\cos x \neq 0$. Делим обе части уравнения на $\cos^2 x$, получим

$$(4 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3 = 0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = -1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{3}{4} \end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + n\pi, \\ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + n\pi. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + n\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + n\pi\right\}$.

**20.** Решить уравнение $3\sin x\cos x - 2\cos^2 x = 0$.

**Решение.** При $\cos x = 0$ левая часть уравнения обращается в нуль. Выносим $\cos x$ за скобки, получим

$$\cos x\,(3\sin x - 2\cos x) = 0.$$

Тогда рассмотрим таких два уравнения:

$$\cos x = 0,\quad 3\sin x - 2\cos x = 0.$$

Решая первое уравнение, находим $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

Второе уравнение является однородным. Делим обе части уравнения на $\sin x$, имеем

$$(3 - 2\operatorname{ctg} x = 0) \Leftrightarrow \left(\operatorname{ctg} x = \frac{3}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \operatorname{arcctg}\frac{3}{2} + n\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \operatorname{arcct}\frac{3}{2} + n\pi\right\}$.

**21.** Решить уравнение $2\cos^3 x + \sin x - 3\sin^2 x\cos x = 0$.

**Решение.** Это уравнение приводится к однородному с помощью преобразования

$$\sin x = (\sin^2 x + \cos^2 x)\sin x.$$

Получаем равносильное уравнение

$$2\cos^3 x + \sin^3 x + \sin x\cos^2 x - 3\sin^2 x\cos x = 0.$$

Так как $\cos x \neq 0$, то делим обе части уравнения на $\cos^3 x$, получим

$$(2 + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x - 3\operatorname{tg}^2 x = 0) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y, \\ y^3 + y + 2 - 3y^2 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = y, \\ y = 2, \\ y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 2, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \operatorname{arctg} 2 + n\pi, \\ x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + n\pi. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{\operatorname{arctg} 2 + n\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} + n\pi\right\}$.

Решить уравнения:

22. $2\sin^2 x + 4\cos^2 x - 3\sin x = 0$.

23. $4\sin x \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 4\sin(\pi + x)\cos x + 2 \times$
$\times \sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)\cos(\pi + x) = 1$.

24. $3\cos x + 4\sin x = 0$.

25. (8.239) $3\sin^2\frac{x}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{2}\right) + 3\sin^2\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} =$
$= \sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}\right)\cos\frac{x}{2}$.

26. $2\sin^2 2x - 3\sin 2x\cos 2x + \cos^2 2x = 2$.

27. $\sin 2x - 2\sin^2 x = 2\cos 2x$.

28. $\sin x - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

*Уравнения вида*

$$a\sin x + b\cos x = c,\ a > 0,\ b > 0 \qquad (19)$$

преобразовываются по формуле

$$a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \alpha),\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}.$$

Другой метод решения:

$$(a\sin x + b\cos x = c) \leftrightarrow \left(2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + b\left(\cos^2\frac{x}{2} - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \sin^2\frac{x}{2}\right) = c\left(\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2}\right)\right) \leftrightarrow \left((b - c)\cos^2\frac{x}{2} - \right.$$
$$\left. - (b + c)\sin^2\frac{x}{2} + 2a\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0\right).$$

Итак, пришли к однородному уравнению.

29. Решить уравнение $3\sin x - 4\cos x = \sqrt{26}$.

Решение. Выполнив преобразования левой части уравнения, рассмотрим равносильные уравнения:

$$\left(5\sin(x - \alpha) = \sqrt{26},\ \alpha = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}\right) \leftrightarrow \left(\sin(x - \alpha) = \frac{\sqrt{26}}{5}\right).$$

Уравнение не имеет решений, так как $\frac{\sqrt{26}}{5} > 1$.

30. Решить уравнение $\sqrt{5}\sin x - 2\cos x = 3\sin 17x$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения, получим равносильные уравнения

$$\left(3\sin(x-\alpha)=3\sin 17x,\ \alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\leftrightarrow(\sin 17x-$$

$$-\sin(x-\alpha)=0)\leftrightarrow\left(2\sin\left(8x+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(9x-\frac{\alpha}{2}\right)=0\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin\left(8x+\frac{\alpha}{2}\right)=0,\\ \cos\left(9x-\frac{\alpha}{2}\right)=0\end{array}\right.\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\alpha}{16}+\frac{n\pi}{8},\\ x=\frac{1}{18}(\alpha+\pi+2n\pi).\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{-\frac{\alpha}{16}+\frac{n\pi}{8};\ \frac{1}{18}(\alpha+(2n+1)\pi)\right\}$,

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}$.

**31.** Решить уравнение $4\cos x=\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+1$.

Решение. Выполним преобразования обеих частей уравнения:

$$\left(4\cos x=\sqrt{3}\frac{\cos x}{\sin x}+1\right)\leftrightarrow(2\sin 2x=2\sin(x+\alpha)),$$

где $\alpha=\operatorname{arctg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$. Далее рассматриваем равносильные уравнения

$$\left(2\sin 2x=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\leftrightarrow\left(\sin 2x-\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\right.$$

$$\left.=0\right)\leftrightarrow\left(2\sin\left(\frac{x-\frac{\pi}{3}}{2}\right)\cos\left(\frac{3x+\frac{\pi}{3}}{2}\right)=0\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{3}+2n\pi,\\ x=\frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right).\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{\pi}{3}+2n\pi;\ \frac{1}{3}\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi\right)\right\}$.

**32.** Решить уравнение $3\sin 2x+2\cos 2x=3$.

Решение. Рассмотрим равносильные уравнения:

$$(3\sin 2x+2\cos 2x=3)\leftrightarrow(6\sin x\cos x+2(\cos^2 x-\sin^2 x)=$$
$$=3(\sin^2 x+\cos^2 x))\leftrightarrow(5\sin^2 x-6\sin x\cos x+$$

$$+\cos^2 x = 0) \leftrightarrow (5\operatorname{tg}^2 x - 6\operatorname{tg} x + 1 = 0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = 1,\\ \operatorname{tg} x = 0{,}2\end{array}\right. \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{4} + n\pi,\\ x = \operatorname{arctg}\ 0{,}2 + n\pi.\end{array}\right.$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi;\ \operatorname{arctg} 0{,}2 + n\pi\right\}$.

Решить уравнения:

33. $3\cos x + 2\sqrt{3}\sin x = 4{,}5$.

34. $\sqrt{3}\sin 3x + \cos 3x = 1$.

35. $\sqrt{2}\cos x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{5}$.

36. $2\sin x - \cos x = 3$.

37. $2\sin 2x + 3\cos 2x = \sqrt{13}\sin 4x$.

38. $12\cos 3x - 5\sin 3x = 13\sin x$.

## § 4. Способ замены

39. (8.102) Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.

Решение. Прибавим к обеим частям уравнения выражение $2\sin^2 x\cos^2 x$ и рассмотрим равносильные уравнения:

$$\left(\sin^4 x + 2\sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x = \sin 2x - \frac{1}{2} + 2\sin^2 x\cos^2 x\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = \sin 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(1 = \sin 2x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2 2x\right).$$

Замена $\sin 2x = y$ приводит к уравнению

$$\left(1 = y - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}y^2\right) \leftrightarrow (y^2 + 2y - 3 = 0) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = -3,\\ y = 1.\end{array}\right.$$

Далее решаем уравнения:

$(\sin 2x = -3) \leftrightarrow (x \in \varnothing)$;

$(\sin 2x = 1) \leftrightarrow \left(2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right)$.

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

**40.** (8.201) Решить уравнение $\sin 2x + 2\operatorname{ctg} x = 3$.

Решение. Применяя формулу $\sin 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$, получим равносильное уравнение

$$\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \frac{2}{\operatorname{tg} x} = 3.$$

Произведём замену $\operatorname{tg} x = y$, получим

$$\left(\frac{2y}{1+y^2} + \frac{2}{y} = 3\right) \leftrightarrow (3y^3 - 4y^2 + 3y - 2 = 0).$$

Это уравнение имеет единственный действительный корень $y = 1$. Далее имеем

$$(\operatorname{tg} x = 1) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

*Уравнения вида*

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin 2x = c$$

решаются следующим образом. Прибавим и вычтем из $\sin 2x$ единицу. Учитывая, что $\sin 2x + 1 = (\sin x + \cos x)^2$, получим равносильные уравнения:

$$(a(\sin x + \cos x) + b(\sin 2x + 1 - 1) = c) \leftrightarrow (a(\sin x + \cos x) + b(\sin x + \cos x)^2 - b = c) \leftrightarrow (a(\sin x + \cos x) + b(\sin x + \cos x)^2 = b + c).$$

Замена $\sin x + \cos x = y$ приводит к квадратному уравнению

$$ay + by^2 = b + c.$$

*Уравнения вида*

$$a(\sin x - \cos x) + b \sin 2x = c$$

решаются аналогично.

**41.** Решить уравнение $\sqrt{6}\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

Решение. Имеем

$$(\sqrt{6}\sin 2x = \sin x - \cos x) \leftrightarrow (\sqrt{6}(\sin 2x - 1 + 1) = \sin x - \cos x) \leftrightarrow (\sqrt{6}(1 - (\sin x - \cos x)^2) = \sin x - \cos x).$$

Замена $\sin x - \cos x = y$ приводит к уравнению $\sqrt{6}(1 - y^2) = y$. Корни этого уравнения $y_1 = -\frac{\sqrt{6}}{2}$, $y_2 = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Так как $y = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, то далее решаем уравнения

$$\left(\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}\right);$$

$$\left(\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \Leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{4} + k\pi + (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + n\pi + (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3};\ \frac{\pi}{4} + k\pi + (-1)^k \times \arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

**42.** (8.038). Решить уравнение $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.

Решение. Выполняя преобразования, получим равносильные уравнения:

$$(\cos^2 x - \sin^2 x - 5\sin x = 3) \Leftrightarrow (1 - 2\sin^2 x - 5\sin x = 3) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (2\sin^2 x + 5\sin x + 2 = 0).$$

Произведя замену $\sin x = y$, получим

$$(2y^2 + 5y + 2 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -2, \\ y = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Далее решаем уравнения

$$(\sin x = -2) \Leftrightarrow (x \in \varnothing);$$

$$\left(\sin x = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(x = \left(-\frac{\pi}{6}\right)(-1)^k + k\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{6}(-1)^{k+1} + k\pi\right\}$.

Решить уравнения:

**43.** $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$.

**44.** $\sin x - \sin 2x = \frac{1}{2} - \cos x$.

**45.** $5\sin 2x + 12 = 12(\sin x + \cos x)$.

**46.** $1 + \sin x + \cos x = 2\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$.

**47.** $\frac{1}{2}(\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x) = \operatorname{cosec} 2x - 1$.

**48.** $2\cos 2x + 2\cos 4x + 3\sin^2 2x = 1$.

**49.** $\sin x - \cos x - 4\cos^2 x \sin x = 4\sin^3 x$.

**50.** $1 + \sec x = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

51. $\operatorname{ctg} x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2.$

52. $2(1 + \sin 2x) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right).$

53. Решить уравнение $\operatorname{tg}(120^\circ + 3x) - \operatorname{tg}(140^\circ - x) = 2\sin(80^\circ + 2x)$.

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{\sin(4x - 20^\circ)}{\cos(120^\circ + 3x)\cos(140^\circ - x)} = \frac{\sin(4x - 20^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos(260^\circ + 2x) + \cos(4x - 20^\circ))} =$$

$$= \frac{2\sin(4x - 20^\circ)}{\cos(270^\circ - 10^\circ + 2x) + \cos(4x - 20^\circ)} =$$

$$= \frac{2\sin(4x - 20^\circ)}{\sin(2x - 10^\circ) + \cos(4x - 20^\circ)}.$$

Находим область определения: $\cos(120^\circ + 3x) \neq 0$, $\cos(140^\circ - x) \neq 0$.

Обозначим $2x - 10^\circ = y$, тогда $2x = y + 10^\circ$ и, подставляя это соотношение в обе части уравнения, получим

$$\left(\frac{2\sin 2y}{\sin y + \cos 2y} = 2\sin(y + 90^\circ)\right) \leftrightarrow (\sin 2y = \cos y(\sin y + \cos 2y)) \leftrightarrow (2\sin y\cos y - \cos y(\sin y + \cos 2y) = 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow (\cos y(\sin y - \cos 2y) = 0).$$

Далее решаем совокупность $\begin{cases}\cos y = 0,\\ \sin y - \cos 2y = 0.\end{cases}$

Из первого уравнения имеем

$$y = 90^\circ(1 + 2k).$$

Решая второе уравнение, получим

$$(\sin y - \cos 2y = 0) \leftrightarrow (\sin y - \sin(90^\circ - 2y) = 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(2\sin\left(\frac{3y}{2} - 45^\circ\right)\cos\left(45^\circ - \frac{y}{2}\right) = 0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases}\sin\left(\frac{3y}{2} - 45^\circ\right) = 0,\\ \cos\left(45^\circ - \frac{y}{2}\right) = 0\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}3y - 90^\circ = 360^\circ k,\\ 90^\circ - y = 180^\circ(1 + 2n)\end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases}y = 30^\circ + 120^\circ k,\\ y = -90^\circ - 360^\circ n.\end{cases}$$

Подставляя вместо $y$ его значения, имеем

$$(2x - 10^\circ = 90^\circ(1 + 2k)) \leftrightarrow (x = 50^\circ + 90^\circ k,\ k = 2n - 1,\ n \in N) \leftrightarrow (x = -40^\circ + 180^\circ n)$$

(при $k = 2n$ эти значения не принадлежат области определения);

$$(2x - 10^\circ = 30^\circ + 120^\circ k) \leftrightarrow (x = 20^\circ + 60^\circ k);$$
$$(2x - 10^\circ = -90^\circ - 360^\circ) \leftrightarrow (x = -40^\circ - 180^\circ n)$$

Проверка подтверждает, что эти корни удовлетворяют уравнению.

*Ответ:* $x \in \{20^\circ + 60^\circ k;\ -40^\circ - 180^\circ n\}$.

**54.** (8.188) Решить уравнение

$$\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15^\circ + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) = \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}(x + 25^\circ).$$

Решение. Рассмотрим равносильные уравнения:

$$((\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 15^\circ) + (\operatorname{ctg}(x+25^\circ) - \operatorname{ctg}(x + 25^\circ) \operatorname{ctg} 15^\circ \operatorname{ctg} x) = 0) \leftrightarrow \left(\frac{\sin(x + 15^\circ)}{\sin x \sin 15^\circ} + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ)\right)\left(1 - \frac{\cos 15^\circ \cos x}{\sin 15^\circ \sin x}\right) = 0\Big) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow (\sin(x + 15^\circ) + \operatorname{ctg}(x + 25^\circ)(\sin 15^\circ \sin x - \cos 15^\circ \cos x) = 0) \leftrightarrow \left(\sin(x + 15^\circ) - \frac{\cos(x + 25^\circ)\cos(x + 15^\circ)}{\sin(x + 25^\circ)} = 0\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(\frac{\sin(x + 15^\circ)\sin(x + 25^\circ) - \cos(x + 25^\circ)\cos(x + 15^\circ)}{\sin(x + 25^\circ)} = 0\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\cos(2x + 40^\circ) = 0).$$

Далее имеем

$$(2x + 40^\circ = 90^\circ + 180^\circ k) \leftrightarrow (x = 25^\circ + 90^\circ k).$$

*Ответ:* $x \in \{25^\circ + 90^\circ k\}$.

**55.** (8.206) Решить уравнение $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \frac{82}{9}(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x + 1)\cos 2x$.

Решение. Преобразуем правую часть уравнения:

$$\frac{82}{9}\left(\frac{\sin x \sin 2x}{\cos x \cos 2x} + 1\right)\cos 2x = \frac{82}{9}\left(\frac{\cos x}{\cos x \cos 2x}\right)\cos 2x = \frac{82}{9}.$$

Далее имеем

$$\left(\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = \frac{82}{9}\right) \leftrightarrow \left(\operatorname{tg}^4 x + \frac{1}{\operatorname{tg}^4 x} = \frac{82}{9}\right).$$

Замена $\operatorname{tg}^4 x = t$ приводит к квадратному уравнению относительно $t$:

$$\left(t + \frac{1}{t} = \frac{82}{9}\right) \leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 9, \\ t = \frac{1}{9}. \end{array}\right.$$

Рассматриваем уравнения

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}^4 x = 9,\\ \operatorname{tg}^4 x = \frac{1}{9}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3},\\ \operatorname{tg} x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \pm\frac{\pi}{3} + n\pi,\\ x = \pm\frac{\pi}{6} + n\pi.\end{array}\right.$$

**56.** (8.258) Решить уравнение $\cos^3 z \cos 3z + \sin^3 z \sin 3z = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Решение. Рассмотрим равносильные уравнения:

$$\left(\cos^2 z \cos z \cos 3z + \sin^2 z \sin z \sin 3z = \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{(1+\cos 2z)}{2} \cdot \frac{1}{2}(\cos 4z + \cos 2z) + \frac{(1-\cos 2z)}{2} \times\right.$$

$$\left.\times \frac{1}{2}(\cos 2z - \cos 4z) = \frac{\sqrt{2}}{4}\right) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\cos 2z\,(1+\cos 4z) =\right.$$

$$\left.= \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \leftrightarrow \left(\cos^3 2z = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right) \leftrightarrow \left(2z = \pm\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(z = \pm\frac{\pi}{8} + n\pi\right).$$

Решить уравнения:

**57.** $\operatorname{ctg}(x - 25^\circ) + \operatorname{tg}(3x + 15^\circ) = 2\sin(2x - 50^\circ)$.

**58.** $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg} 2x$.

**59.** $\sin^2 3x + \frac{1}{2}\sin^2 6x = 1$.

**60.** $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x = \sin x - \cos x$.

**61.** $1 + \cos x + \sin x + \cos 2x + \sin 2x = 0$.

**62.** $\sec^2 x - \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos 2x \sec^2 x$.

**63.** $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$.

**64.** $1 + \sec x = \sin(\pi - x) - \cos x \operatorname{tg}\frac{\pi + x}{2}$.

**65.** $3(\sin x + \cos x) = 2\sin 2x$.

**66.** $\operatorname{tg} x - \sin x = 2\sin^2\frac{x}{2}$.

**67.** $\sin x - \operatorname{tg} x = \sec x + \operatorname{cosec} x$.

**68.** $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$.

**69.** $\operatorname{ctg}^2 x \sin x = \cos x$

**70.** $\sin^2 x - \cos^3 x = \cos 3x$.

71. $\cos 2x - \cos 8x + \cos 6x = 1$.

72. $\operatorname{tg}(2x-1)\operatorname{tg}(3x+1) = 1$.

73. $\sec^2\frac{x}{2} + \operatorname{cosec}^2\frac{x}{2} = 16\operatorname{ctg} x$.

74. $\sin\frac{5x}{2} + \sin\frac{x}{2} = \sin\frac{11x}{2}$.

75. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} x = \operatorname{cosec} 2x + 1$.

76. $\sin x + \operatorname{tg} x = \sec x - \cos x$.

77. $\sin^3 x(1 - \operatorname{ctg} x) - \cos^3 x(1 - \operatorname{tg} x) = 0$.

78. $\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\pi x - \frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$.

## § 5. Приведение к системам

*Уравнения вида*

$$\sin ax \cos bx = 1, \quad \sin ax + \sin bx = 2$$

и аналогичные этим уравнениям решаются путем приведения к системам тригонометрических уравнений. Рассмотрим примеры.

**79.** Решить уравнение $\cos\frac{3x}{4} + \cos 2x = 2$.

Решение. Так как

$$\left(\left|\cos\frac{3x}{4}\right| \leqslant 1, \ |\cos 2x| \leqslant 1\right) \leftarrow \left(\left|\cos\frac{3x}{4} + \cos 2x\right| \leqslant 2\right),$$

то равенство достигается лишь тогда, когда $\cos\frac{3x}{4} = 1$ и $\cos 2x = 1$ *одновременно. Следовательно, данное уравнение* равносильно системе

$$\begin{cases} \cos\frac{3x}{4} = 1, \\ \cos 2x = 1 \end{cases} \leftarrow \begin{cases} \frac{3x}{4} = 2\pi n, \\ 2x = 2k\pi \end{cases} \leftarrow \begin{cases} x = \frac{8\pi n}{3}, \\ x = k\pi. \end{cases}$$

Приравнивая правые части найденных равенств, получаем уравнение $3k = 8n$, где $k$ и $n$ — целые числа. Это уравнение имеет решение $\begin{cases} k = 8m, \\ n = 3m, \end{cases}$ где $m \in \mathbf{Z}$. Подставляя полученные значения $k$ и $n$, получим $x = 8\pi m$.

*Ответ:* $x \in \{8\pi m\}$.

**80.** Решить уравнение $\sin 3x \cos 5x = 1$.

Решение. Имеем равносильные уравнения

$$\left(\frac{1}{2}(\sin 8x - \sin 2x) = 1\right) \leftarrow (\sin 8x - \sin 2x = 2).$$

Рассмотрим системы, равносильные этому уравнению:

$$\begin{cases}\sin 8x = 1,\\ \sin 2x = -1\end{cases} \leftrightarrow \begin{cases}8x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\\ 2x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi.\end{cases}$$

Умножая обе части второго уравнения последней системы на четыре и приравнивая правые части, получим

$$\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi = -2\pi + 8n\pi\right) \leftrightarrow \left(\frac{1}{2} = 8n - 2k - 2\right).$$

Очевидно, полученное уравнение не имеет решения (так как $k$ и $n$ — целые числа).

**81.** Решить уравнение $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x$.

Решение. Исследуем обе части уравнения:

$$4 + \cos^2 3x \geqslant 4;$$
$$(|\cos 2x - \cos 4x| \leqslant 2) \leftrightarrow ((\cos 2x - \cos 4)^2 \leqslant 4).$$

Равенство достигается при одновременном выполнении таких требований:

$$\begin{cases}|\cos 2x - \cos 4x| = 2,\\ 4 + \cos^2 3x = 4,\end{cases}$$

что равносильно двум системам

$$\text{а)}\ \begin{cases}\cos 2x = 1,\\ \cos 4x = -1,\\ \cos 3x = 0;\end{cases}\qquad \text{б)}\ \begin{cases}\cos 2x = -1,\\ \cos 4x = 1,\\ \cos 3x = 0.\end{cases}$$

Решаем первую систему: $\cos 2x = 1$, откуда $x = n\pi$, но тогда $\cos 4x = 1$ и система несовместна. Решаем вторую систему: $\cos 2x = -1$, откуда $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Это значение удовлетворяет остальным уравнениям системы.

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$.

**82.** Решить уравнение $\cos^2 3x - \cos^4 x \cos 3x + \frac{1}{4}\cos^2 x = 0$.

Решение. Решим это уравнение как квадратное относительно $\cos 3x$:

$$\cos 3x = \frac{1}{2}(\cos^4 x \pm \sqrt{\cos^8 x - \cos^2 x}).$$

Исследуя выражение под радикалом, рассматриваем три случая:

а) $(\cos x = 0) \Rightarrow (\cos 3x = 0) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0, \\ \cos 3x = 0; \end{cases}$

б) $(|\cos x| = 1) \Rightarrow \left(\cos 3x = \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} |\cos x| = 1, \\ \cos 3x = \frac{1}{2}; \end{cases}$

в) $0 < |\cos x| < 1$, тогда выражение под радикалом отрицательно и, следовательно, равенство теряет смысл.

Решая первую систему, находим $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$. Это решение удовлетворяет и второму уравнению. Решая вторую систему, находим $x = n\pi$, что противоречит второму уравнению. Следовательно, вторая система не имеет решения.

*Ответ*: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$.

Отметим, что уравнение вида $f_1^2(x) + f_2^2(x) = 0$ эквивалентно системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ f_2(x) = 0. \end{cases}$$

Приведем примеры.

**83.** Решить уравнение $\sin^2 5x + 1 = \cos^2 3x$.

Решение. После преобразований получаем равносильные уравнения:

$$(\sin^2 5x + 1 - \cos^2 3x = 0) \Leftrightarrow (\sin^2 5x + \sin^2 3x = 0).$$

Рассмотрим эквивалентные системы:

$$\begin{cases} \sin 5x = 0, \\ \sin 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = k\pi, \\ 3x = n\pi \end{cases} \Leftrightarrow \left(\frac{k}{5} = \frac{n}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 5m, \\ n = 3m, \end{cases} \quad m \in Z.$$

*Ответ*: $x \in \{\pi m\}$.

**84.** Решить уравнение $\sin^4 x + \cos^7 x = 1$.

Решение. Рассмотрим равносильное уравнение

$$\sin^4 x + \cos^7 x = \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Так как $\sin^4 x \leqslant \sin^2 x$, $\cos^7 x \leqslant \cos^2 x$, то получаем равносильные неравенства

$$(\sin^4 x + \cos^7 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x) \Leftrightarrow (\sin^4 x + \cos^7 x \leqslant 1).$$

Следовательно, уравнение эквивалентно системе

$$\begin{cases}\sin^4 x = \sin^2 x,\\ \cos^7 x = \cos^2 x.\end{cases}$$

Рассмотрим уравнения, равносильные первому уравнению системы:

$$(\sin^4 x = \sin^2 x) \leftrightarrow (\sin^2 x(1 - \sin^2 x) = 0) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ \sin^2 x = 1\end{array}\right. \leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\pi,\\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi.\end{array}\right.$$

Легко убедиться, что решения $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ и $x = n\pi$ (при четных $n$) будут решениями и второго уравнения системы.

*Ответ:* $x \in \left\{2n\pi;\ \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right\}$.

Решить уравнения:

**85.** $(\sin x + \cos x)\sqrt{2} = 2\operatorname{cosec} 2x$. **86.** $\operatorname{ctg}^4 x = \cos^2 2x - 1$.

**87.** $\cos^{16} x + \sin^{40} x = 1$. **88.** (8.350) $\cos^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{12} - x\right) = 0$.

**89.** (8.437) $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(4 - 2\cos^4 x) = 1 + 5\sin 3y$.

**90.** (8.457) $\cos 6x + \sin\frac{5x}{2} = 2$. **91.** $\sec x = \sin 3x$.

### § 6. Уравнения с обратными тригонометрическими функциями

Рассмотрим примеры уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции (аркфункции).

**92.** Решить уравнение $2\operatorname{arcctg} x + 4\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Используя тождество $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, получим

$$\left(4\operatorname{arctg} x + 2\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x\right) = \frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow \left(\operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{4}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) \leftrightarrow (x = -1).$$

*Ответ:* $x \in \{-1\}$.

При решении уравнений с обратными тригонометрическими функциями часто применяется переход от равенства углов к равенству тригонометрических функций этих углов. При этом происходит расширение области определения уравнения, поэтому возможно появление посторонних корней, и, следовательно, необходима проверка полученных решений.

**93.** Решить уравнение $\arcsin 2x = \frac{\pi}{3} - \arcsin x$.

Решение. Находим область определения: $\begin{cases} |x| \leqslant 1, \\ |2x| \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(|x| \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

Обозначим $\arcsin x = \alpha$, $\arcsin 2x = \beta$, тогда $\sin\alpha = x$, $\sin\beta = 2x$ и данное уравнение принимает вид $\beta = \frac{\pi}{3} - \alpha$, откуда получим цепочку равносильных уравнений:

$$\left(\sin\beta = \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\right) \leftrightarrow \left(2x = \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \left(2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{x}{2}\right).$$

Учитывая, что $\sin\alpha = x$, имеем $\cos\alpha = \sqrt{1 - x^2}$ и получим уравнение $2x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1 - x^2} - \frac{x}{2}$, корень которого $x = \sqrt{\frac{3}{28}}$.

*Ответ:* $x \in \left\{\sqrt{\frac{3}{28}}\right\}$.

**94.** Решить уравнение $2\operatorname{arctg}(x - 1) = \arccos\frac{x}{2}$.

Решение. Находим область определения, решая неравенство $\left(\left|\frac{x}{2}\right| \leqslant 1\right) \leftrightarrow (|x| \leqslant 2)$.

Обозначим $\operatorname{arctg}(x - 1) = \alpha$, $\arccos\frac{x}{2} = \beta$, $0 < \beta < \pi$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = x - 1$, $\cos\beta = \frac{x}{2}$. Тогда исходное уравнение примет вид $2\alpha = \beta$ или $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Решая уравнение $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, получим

$$\left(\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right) \leftrightarrow \left(x-1 = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}\right) \leftrightarrow \left(x-1 = \right.$$

$$\left. = \sqrt{\frac{1-\frac{x}{2}}{1+\frac{x}{2}}}\right) \leftrightarrow \left(x-1 = \sqrt{\frac{2-x}{2+x}}\right) \leftrightarrow \left(x^2-2x+1 = \frac{2-x}{2+x}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow (x^3-2x=0) \rightarrow \begin{bmatrix} x=0, \\ x=\pm\sqrt{2}. \end{bmatrix}$$

Производя проверку, убеждаемся, что $x=0$ и $x=-\sqrt{2}$ — посторонние корни. Следует отметить, что так как $0<\beta<\pi$, то $0<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}>0$, поэтому в формуле

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}}$$

выбираем знак плюс.

*Ответ:* $x\in\{\sqrt{2}\}$.

**95.** Решить уравнение $2\arcsin x = \arcsin\left(\frac{10x}{13}\right)$.

Решение. Обозначим $\arcsin x=\alpha$, $\arcsin\frac{10x}{13}=\beta$, откуда $\sin\alpha=x$, $\sin\beta=\frac{10x}{13}$, $\cos\alpha=\sqrt{1-x^2}$ $\left(\text{так как } -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

В этих обозначениях исходное уравнение имеет вид $2\alpha=\beta$, откуда получим равносильные уравнения:

$$(\sin 2\alpha = \sin\beta) \leftrightarrow (2\sin\alpha\cos\alpha = \sin\beta) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(2x\sqrt{1-x^2} = \frac{10}{13}x\right) \leftrightarrow \left(x\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{5}{13}\right)=0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{bmatrix} x=0, \\ \sqrt{1-x^2}=\frac{5}{13} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x=0, \\ x=\pm\frac{12}{13}. \end{bmatrix}$$

Проверка подтверждает, что $x=0$ удовлетворяет уравнению, а $x=\pm\frac{12}{13}$ — посторонние корни. Действительно, так

как $\arcsin\frac{12}{13} > \frac{\pi}{4}$, то $2\arcsin\frac{12}{13} > \frac{\pi}{2}$, а $\arcsin\left(\frac{10}{13}\cdot\frac{12}{13}\right) < \frac{\pi}{2}$ и, следовательно, $2\arcsin\frac{12}{13} \neq \arcsin\frac{120}{169}$.

Аналогично можно показать, что

$$2\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) \neq \arcsin\left(-\frac{120}{169}\right).$$

*Ответ*: $x \in \{0\}$.

Решить уравнения:

96. $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \arcsin x = \frac{\pi}{4}$.

97. $\arcsin x + \arcsin 2x = \frac{\pi}{3}$.

98. $2\arcsin x = \arccos 2x$.

99. $2\arccos x = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right)$.

100. $\operatorname{arctg}(x-1) + \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x$.

101. $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}} + \arcsin\sqrt{1-x} = \arcsin\frac{1}{3}$.

## § 7. Примеры повышенной трудности

102. (8.300) Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x + 2\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = 0$.

Решение. Выполняя преобразования, получим

$$\operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 5x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 5x = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg} 3x(\operatorname{tg} 3x \operatorname{tg} 5x + 1) - \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\operatorname{tg} 3x\left(\frac{\sin 3x \sin 5x}{\cos 3x \cos 5x} + 1\right) - \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sin 3x}{\cos 3x}\cdot\frac{\cos 2x}{\cos 3x \cos 5x} - \frac{\sin 2x}{\cos 3x \cos 5x} = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin 3x \cos 2x - \sin 2x \cos 3x = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sin x = 0) \Leftrightarrow (x = n\pi).$$

*Ответ*: $x \in \{n\pi\}$.

103. (8.440) Решить уравнение $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} t) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} t)$.

Решение. Область определения уравнения находим, решая совокупность неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\pi \operatorname{ctg} t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\\ \pi \operatorname{tg} t \neq \pi n\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{ctg} t \neq \frac{1}{2} + k,\\ \operatorname{tg} t \neq n.\end{array}\right.$$

Рассмотрим равносильные уравнения (в указанной области определения):

$$\left(\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} t) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{tg} t\right) = 0\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sin\left(\pi \operatorname{ctg} t - \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{tg} t\right)}{\cos(\pi \operatorname{ctg} t)\cos\left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{tg} t\right)} = 0\right) \Rightarrow \left(\sin\left(\pi \operatorname{ctg} t - \frac{\pi}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \pi \operatorname{tg} t\right) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\pi \operatorname{ctg} t - \frac{\pi}{2} + \pi \operatorname{tg} t = m\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{ctg} t + \operatorname{tg} t = m + \frac{1}{2}\right).$$

Производя замену $\operatorname{tg} t = x$, получим

$$\left(\frac{1}{x} + x = m + \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow (x^2 - x\left(m + \frac{1}{2}\right) + 1 = 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4}\right)\right) \Rightarrow \left(\operatorname{tg} t = \frac{1}{2}\left(m + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(t = \operatorname{arctg} \frac{m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4}}{2} + l\pi,\ l \in Z\right).$$

Выясним, каким ограничениям должны удовлетворять значения $m \in Z$, чтобы эти решения имели смысл. Очевидные ограничения: $\left(\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4 \geqslant 0\right) \Rightarrow \left(\left|m + \frac{1}{2}\right| \geqslant 2\right) \Rightarrow (m \neq$ $\neq 0; \pm 1; -2, m \in Z)$. Так как $\operatorname{tg} t \neq n$, $n \in Z$, то получим равносильные неравенства

$$\left(m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4} \neq 2n\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (n(2m - 2n + 1) \neq 2) \Rightarrow (m \neq 2, -3).$$

Объединяя все ограничения, получим ответ.

*Ответ:* $t \in \left\{\operatorname{arctg} \frac{m + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(m + \frac{1}{2}\right)^2 - 4}}{2} + l\pi,\ l \in Z,\right.$ $\left. m \in Z;\ m \neq 0; \pm 1; \pm 2; -3\right\}$.

**104.** (8.407). Решить уравнение

$$\frac{1+\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x+\ldots}{1-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}^2x-\ldots}=1+\sin 2x$$

при условии, что $|\operatorname{tg}x|<1$.

Решение. В числителе находится сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1=1$, $q=\operatorname{tg}x$; в знаменателе — сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1=1$, $q=-\operatorname{tg}x$. Выполним преобразования обеих частей уравнения, применяя формулу $S=\frac{a_1}{1-q}$:

$$\left(\frac{1}{1-\operatorname{tg}x};\ \frac{1}{1+\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x\right)\leftrightarrow\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\frac{2\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}^2x}\right).$$

Замена $\operatorname{tg}x=y$ приводит к равносильным уравнениям

$$\left(\frac{1+y}{1-y}=1+\frac{2y}{1+y^2}\right)\leftrightarrow\left(\frac{1+y}{1-y}=\frac{(1+y)^2}{1+y^2}\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{1-y}=\frac{1+y}{1+y^2}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(1+y^2=1-y^2)\Rightarrow(y=0)\Rightarrow(\operatorname{tg}x=0)\Rightarrow(x=k\pi).$$

*Ответ:* $x\in\{k\pi\}$.

**105.** (8.423) Решить уравнение $\sqrt[3]{\sin^2x}-\sqrt[3]{\cos^2x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$

Решение. Возводим обе части уравнения в куб:

$$\sin^2x-\cos^2x-3\sqrt[3]{\sin^2x\cos^2x}\,(\sqrt[3]{\sin^2x}-\sqrt[3]{\cos^2x})=2\cos 2x.$$

Так как по условию $\sqrt[3]{\sin^2x}-\sqrt[3]{\cos^2x}=\sqrt[3]{2\cos 2x}$, то получим уравнения:

$$(-3\sqrt[3]{\sin^2x\cos^2x}\,\sqrt[3]{2\cos 2x}=3\cos 2x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\sqrt[3]{(\sin x\cos x)^2\,2\cos 2x}=-\cos 2x).$$

Возводим обе части полученного уравнения в куб и рассмотрим уравнения:

$$(2(\sin x\cos x)^2\cos 2x=-\cos^3 2x)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow(\cos 2x\,(2\sin^2x\cos^2x+\cos^2 2x)=0)\leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow\left(\cos 2x\left(\frac{1}{2}\sin^2 2x+\cos^2 2x\right)=0\right)\leftrightarrow(\cos 2x=0)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\right).$$

Проверка подтверждает, что все полученные значения удовлетворяют уравнению.

*Ответ:* $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right\}$.

Решить уравнения:

**106.** (8.284) $\cos^6 x + \sin^6 x - \cos^2 2x = \frac{1}{16}$.

**107.** (8.321) $\sin^2(t + 45°) - \sin^2(t - 30°) - \sin 15° \cos(2t + 15°) = \frac{\sin 6t}{2}$.

**108.** $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{tg} 2x = \frac{4\cos^2 2x}{\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x}$.

**109.** $1 - \cos 6x = 2 \operatorname{tg} 3x$.

**110.** $\cos 3x \cos^3 x + \sin 3x \sin^3 x = 0$.

**111.** $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 3$.

**112.** $\cos x = \sin \frac{2}{x}$.

**113.** $3 \sin x + \sin 2x = 6 \sin^2 \frac{x}{2}$.

**114.** $8 \cos x + \sqrt{3} \operatorname{cosec} x = \sec x$.

**115.** $\sqrt{2}(\sin x - \cos x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.

**116.** $3 \operatorname{ctg} 2x - 4 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

**117.** $5 \sin(45° - x) + 12 \sin(45° + x) = 13 \sin(3x - 13°)$.

**118.** $2\sqrt{3 \sin 2x} = \frac{3 \operatorname{tg} 2x}{2\sqrt{\sin 2x - 1}} - \sqrt{3}$.

**119.** $6 \operatorname{tg} x + 5 \operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$.

**120.** $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2} \cos^3\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

**121.** $\sin(\pi - x) + \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sec x - \cos x}{2 \sin x}$.

**122.** $1 - \cos^2 2x = \sin 3x - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

**123.** $4 \cos x - 2 \cos 2x - \cos 4x = 1$.

**124.** $\sin^4 x + \sin^4\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin^4\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{9}{8}$.

**125.** $\sin x + \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + \sec x + \operatorname{cosec} x = -3$.

**126.** $\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - 2t\right) = (\sec^2 2t - 1)(1 + \cos 2t)$.

**127.** $\operatorname{tg} 2t + \operatorname{ctg} t = -4 \operatorname{ctg} t \cos 2t$.

128. (8.331) $\cos 8x+3\cos 4x+3\cos 2x=8\cos x\cos^3 3x-\frac{1}{2}$.

129. $\sin^4 x-\sin^3 x+14\sin x+14=0$.

130. $\cos 4x\cos 2x=-1$. 131. $\operatorname{ctg} x\left(1-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=1$.

ГЛАВА IX

# ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И НЕРАВЕНСТВА

## § 1. Решение простейших систем

1. Решить систему $\begin{cases}\sin x\cos y=-\frac{1}{2},\\ \cos x\sin y=\frac{1}{2}.\end{cases}$

Решение. Складывая и вычитая обе части уравнений, получим

$$\begin{cases}\sin(x+y)=0,\\ \sin(y-x)=1\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}x+y=\pi n,\\ y-x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}(2n-4k-1),\\ y=\frac{\pi}{4}(2n+4k+1).\end{cases}$$

*Ответ:* $\left\{\frac{\pi}{4}(2n-4k-1);\ \frac{\pi}{4}(2n+4k+1)\right\}$.

2. (8.399) Решить систему $\begin{cases}x+y=\frac{\pi}{4},\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y=\frac{1}{6}.\end{cases}$

Решение. Рассмотрим эквивалентные системы

$$\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}-x,\\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1}{6}\end{cases}\leftrightarrow\begin{cases}y=\frac{\pi}{4}-x,\\ \operatorname{tg}x\left(\frac{1-\operatorname{tg}x}{1+\operatorname{tg}x}\right)=\frac{1}{6}\end{cases}\leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = z, \\ 6z^2 - 5z + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = 0{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{\pi}{4} - x, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \operatorname{arctg} 0{,}5 + \pi n, \\ y = \frac{\pi}{4} - n\pi - \operatorname{arctg} 0{,}5, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + n\pi, \\ y = \frac{\pi}{4} - n\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

*Ответ:* $\left\{\left(n\pi + \operatorname{arctg} 0{,}5;\ \frac{\pi}{4} - n\pi - \operatorname{arctg} 0{,}5\right),\right.$
$\left.\left(\operatorname{arctg} \frac{1}{3} + n\pi;\ \frac{\pi}{4} - n\pi - \operatorname{arctg} \frac{1}{3}\right)\right\}$.

## § 2. Приведение к простейшим системам

3. Решить систему $\begin{cases} \sin y = 5 \sin x, \\ \cos y = 2 - 3 \cos x. \end{cases}$

Решение. Возводя обе части уравнений в квадрат и складывая, получим уравнение $1 = 25 \sin^2 x + 4 - 12 \cos x + 9 \cos^2 x$, которое равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 1, \\ \cos x = -\frac{7}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2n\pi, \\ x \in \varnothing. \end{array}\right.$$

Далее решаем простейшую систему

$$\begin{cases} \cos x = 1, \\ \cos y = -1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2n\pi, \\ y = \pi(2k + 1). \end{cases}$$

*Ответ:* $\{(2n\pi;\ \pi(2k + 1))\}$.

4. (8.401) Решить систему $\begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} \frac{y}{2} = 2, \\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = -1{,}8. \end{cases}$

Решение. Выполним преобразования второго уравнения системы

$$\left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=-1{,}8\right)\leftrightarrow\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}-\right.$$

$$\left.-\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{tg}\frac{y}{2}=-3{,}6\right).$$

Далее, с учетом первого уравнения системы получим

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}\frac{y}{2}}=-1{,}6,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=2-\operatorname{tg}\frac{y}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\dfrac{5}{4}=2\operatorname{tg}\frac{y}{2}-\operatorname{tg}^2\frac{y}{2},\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=2-\operatorname{tg}\frac{y}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=z,\\ z^2-2z-\frac{5}{4}=0,\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=2-z\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\operatorname{tg}\frac{y}{2}=2{,}5\\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-0{,}5,\end{cases}\\ \begin{cases}\operatorname{tg}\frac{x}{2}=2{,}5,\\ \operatorname{tg}\frac{y}{2}=-0{,}5\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\operatorname{arctg}2{,}5+2n\pi,\\ x=-2\operatorname{arctg}0{,}5+2k\pi,\end{cases}\\ \begin{cases}x=2\operatorname{arctg}2{,}5+2k\pi,\\ y=-2\operatorname{arctg}0{,}5+2n\pi.\end{cases}\end{array}\right.$$

*Ответ*: $\{(-2\operatorname{arctg}0{,}5+2k\pi;\ 2\operatorname{arctg}2{,}5+2n\pi),$
$(2\operatorname{arctg}2{,}5+2k\pi;\ -2\operatorname{arctg}0{,}5+2n\pi)\}$.

Решить системы:

5. $\begin{cases}\cos^2 y+\sin^2 x=1{,}5,\\ \cos^2 x-\sin^2 y=0{,}5.\end{cases}$

6. $\begin{cases}9\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=4,\\ 2\operatorname{ctg}x+4\operatorname{ctg}y=1.\end{cases}$

7. $\begin{cases}\cos x\sin y=-\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}y,\\ \operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y=1.\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sin x=\cos^2 y,\\ \sin 2x=\cos y.\end{cases}$

9. $\begin{cases}\sin 2x+\sin 2y=0{,}5,\\ 2\sin(x+y)=1.\end{cases}$

10. $\begin{cases}\sin x+\sin y=a,\\ \cos x+\cos y=b.\end{cases}$

11. $\begin{cases}\cos x\cos y=a,\\ x-y=b,\end{cases}$

12. $\begin{cases}\sin x-\sin y=a,\\ x-y=b.\end{cases}$

13. $\begin{cases}\cos x-\cos y=p,\\ y-x=d.\end{cases}$

14. $\begin{cases}a\sin x=b\cos y,\\ \sin^2 x+\sin^2 y=c.\end{cases}$

15. $\begin{cases} \dfrac{\sin x}{\sin y} = \sqrt{2}, \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}. \end{cases}$ 16. $\begin{cases} x + y = a, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = m. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{5}{2}. \end{cases}$ 18. $\begin{cases} \cos x + \cos y = \sqrt{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

19. $\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{4}, \\ \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} y} = \dfrac{1 - \sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}. \end{cases}$ 20. (8.402) $\begin{cases} 2^{\cos x} + 2^{\sec y} = 5, \\ 2^{\cos x} \cdot 2^{\sec y} = 4. \end{cases}$

21. (8.404) $\begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{5\pi}{6}. \end{cases}$

22. (8.405) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

## § 3. Решение простейших неравенств

Простейшие тригонометрические неравенства удобнее всего решать графически. Приведем примеры.

**23.** Решить неравенство $\cos x < a$.

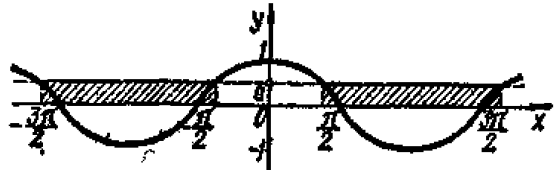



Рис. 14

Р е ш е н и е. Строим график функции $y = \cos x$ (рис. 14). Рассмотрим возможные случаи:

а) если $a > 1$, то решением неравенства $\cos x < a$ будет любое значение $x$;

б) если $a \leqslant -1$, то неравенство не имеет решения;

в) при $-1 < a < 1$ решением неравенства (с учетом периодичности $\cos x$) будет такая область:

$$2n\pi + \arccos a < x < 2\pi - \arccos a + 2n\pi.$$

**24.** Решить неравенство $\cos x > a$.

Решение. При $-1 < a < 1$ получаем решение:

$$2n\pi - \arccos a < x < \arccos a + 2n\pi.$$

**25.** Решить неравенство $\sin x < a$.

Решение. Решаем это неравенство с помощью графика функции $y = \sin x$ (рис. 15).

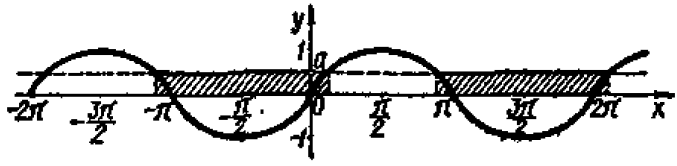



Рис. 15

Аналогично примеру 23 получаем, что при $a > 1$ неравенство имеет решение при любом $x$, а при $a \leqslant -1$ неравенство не имеет решений. При $-1 < a < 1$ получим решение неравенства, учитывая периодичность функции $y = \sin x$:

$$-\arcsin a + 2k\pi - \pi < x < \arcsin a + 2k\pi.$$

**26.** Решить неравенство $\sin x > a$.

Решение. При $-1 < a < 1$ получим решение (исходя из графика):

$$2k\pi + \arcsin a < x < \pi - \arcsin a + 2k\pi.$$

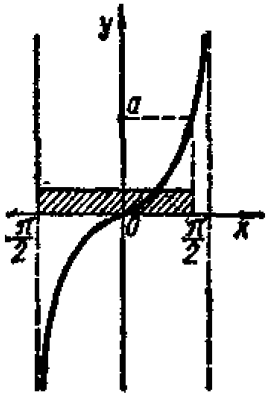



Рис. 16

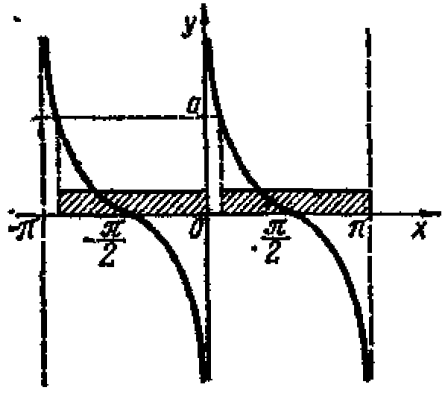



Рис. 17

**27.** Решить неравенство $\operatorname{tg} x < a$.

Решение. Используя график функции $y = \operatorname{tg} x$ (рис. 16), получим решение неравенства (учитывая периодичность):

$$k\pi - \frac{\pi}{2} < x < \operatorname{arctg} a + k\pi.$$

**28.** Решить неравенство $\operatorname{tg} x > a$.

Решение. Аналогично предыдущему примеру получим решение, используя рис. 16:

$$k\pi + \operatorname{arctg} a < x < \frac{\pi}{2} + k\pi.$$

**29.** Решить неравенство $\operatorname{ctg} x > a$.

Решение. Используя рис. 17 (график функции $y = \operatorname{ctg} x$), получим решение неравенства:

$$k\pi < x < \operatorname{arcctg} a + k\pi.$$

**30.** Решить неравенство $\operatorname{ctg} x < a$.

Решение. Используя рис. 17, находим решение неравенства:

$$\operatorname{arcctg} a + k\pi < x < \pi(1 + k).$$

Аналогичным образом решаются неравенства вида $a < \sin x < b$. Приведем пример.

**31.** Решить неравенство $-\frac{1}{2} < \sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Рассматривая точки пересечения графиков функций $y = \sin x$, $y = -\frac{1}{2}$, $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ в промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, получим решение неравенства:

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right[ \cup \left]\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{6}\right[.$$

Учитывая периодичность функции $y = \sin x$ (см. рис. 15), получим

$$x \in \left]-\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[ \cup \left]\frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right[, \quad k \in Z.$$

### § 4. Приведение к простейшим неравенствам

**32.** Решить неравенство $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

Решение. Представим неравенство в виде

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > \sin^2 x + \cos^2 x.$$

Так как $\sqrt{\sin x} > \sin^2 x$, $\sqrt{\cos x} > \cos^2 x$ (при $0 < \cos x <$

$< 1$, $0 < \sin x < 1$), то данное неравенство эквивалентно системе неравенств

$$\begin{cases} 0 < \sin x < 1, \\ 0 < \cos x < 1 \end{cases} \leftrightarrow \left(2n\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right).$$

**33.** (9.277) Решить неравенство

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 12^\circ\right) > \operatorname{ctg}(x + 102^\circ).$$

*Решение.* Выполняя преобразования, получим равносильные неравенства:

$$\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 12^\circ\right) - \operatorname{ctg}(x + 102^\circ) > 0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{15}\right) > 0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{15}\right)}{\sin\frac{x}{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right)} + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{15}\right) > 0\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{15}\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right)\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 0\right).$$

Решая систему неравенств

$$\begin{cases} \sin\frac{x}{2} \neq 0, \\ \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) \neq 0, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{15}\right) \neq 0, \end{cases}$$

находим область определения этого неравенства:

$$x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}, \quad x \neq 2k\pi - \frac{2\pi}{15}, \quad x \neq 2k\pi.$$

Далее решаем уравнения:

а) $\left(\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{15}\right) = 0\right) \Rightarrow \left(x = n\pi - \frac{\pi}{15}\right)$;

б) $\left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0\right) \Rightarrow \left(x = \pi\left(2n + 1\right)\right)$;

в) $\left(\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) = 0\right) \Rightarrow \left(x = \pi\left(2n + 1\right) - \frac{2\pi}{15}\right)$.

На числовую прямую наносим область определения и найденные значения $x$. В промежутке $[0; 2\pi]$ получим следующие интервалы:

$$0 < x < \frac{13\pi}{30};\ \frac{13\pi}{30} < x < \frac{13\pi}{15};\ \frac{13\pi}{15} < x < \frac{14\pi}{15};\ \frac{14\pi}{15} < x < \pi;$$
$$\pi < x < \frac{43\pi}{30};\ \frac{43\pi}{30} < x < \frac{28\pi}{15};\ \frac{28\pi}{15} < x < \frac{29\pi}{15};\ \frac{29\pi}{15} < x < 2\pi.$$

В любом из полученных интервалов легко установить знак каждого сомножителя левой части неравенства. Например, рассматривая интервал $\frac{13\pi}{15} < x < \frac{14\pi}{15}$, имеем $\frac{14\pi}{15} < x + \frac{\pi}{15} < \pi$. Следовательно, угол $x + \frac{\pi}{15}$ лежит во второй четверти, где тангенс отрицателен.

Из неравенства $\frac{13\pi}{15} < x < \frac{14\pi}{15}$ следует, что

$$\frac{13\pi}{30} < \frac{x}{2} < \frac{7\pi}{15};\ \frac{\pi}{2} < \frac{x}{2} + \frac{\pi}{15} < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{30}.$$

Как видим, $\frac{x}{2}$ принадлежит первой четверти, а $\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}$ — второй четверти, поэтому

$$\operatorname{ctg}\frac{x}{2} > 0,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{15}\right) < 0.$$

Отсюда следует, что левая часть неравенства при $\frac{13\pi}{15} < x < \frac{14\pi}{15}$ положительна. Аналогично устанавливаем, что левая часть неравенства положительна при

$$0 < x < \frac{13\pi}{30},\ \frac{13\pi}{15} < x < \frac{14\pi}{15};\ \pi < x < \frac{43\pi}{30},\ \frac{28\pi}{15} < x < \frac{29\pi}{15}.$$

Для записи общего решения надо учесть периодичность левой части неравенства. Отметим, что третий и четвертый интервалы получаются при сдвиге первого и второго интервалов на $\pi$. Учитывая периодичность, находим общее решение.

*Ответ:* $x \in \left]n\pi; \frac{13\pi}{30} + n\pi\right[ \cup \left]\frac{13\pi}{15} + n\pi; \frac{14\pi}{15} + n\pi\right[$.

34. Решить неравенство $\sin 2x + \operatorname{ctg} x - 3\cos x \geqslant 0$.

Решение. Левая часть неравенства является периодической функцией с периодом $T = 2\pi$. Ищем решение для $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Находим область определения неравенства: $x \neq n\pi$.

Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin 2x + \operatorname{ctg} x - 3\cos x = 2\sin x\cos x + \frac{\cos x}{\sin x} - 3\cos x = \\ = \operatorname{ctg} x\,(2\sin^2 x - 3\sin x + 1).$$

Далее раскладываем на множители выражение в круглых скобках:

$$2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1).$$

Итак, исходное неравенство эквивалентно такому:

$$\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)(\sin x - 1)\operatorname{ctg} x \geqslant 0.$$

Решаем уравнения:

а) $(\sin x = 1) \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)$;

б) $\left(\sin x = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + n\pi\right)$;

в) $(\operatorname{ctg} x = 0) \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$.

Изображая полученные решения в промежутке $[0; 2\pi]$, получим промежутки

$$\left]0; \frac{\pi}{6}\right], \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right], \left[\frac{5\pi}{6}; \pi\right[, \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right], \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right].$$

Устанавливаем, что решениями исходного неравенства являются интервалы $\left]0; \frac{\pi}{6}\right[, \left[\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right], \left]\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$. При записи общего решения учитываем периодичность.

*Ответ:* $x \in \left]2n\pi; \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right] \cup \left[\frac{\pi}{2} + 2n\pi; \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\right] \cup$

$\cup \left]\pi(2n+1); \frac{3\pi}{2} + 2n\pi\right]$.

Решить неравенства:

35. (9.289) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

36. $\frac{\sin x}{1 + \cos x} \geqslant 0$.

37. (9.290) $\sin(2x + 10^\circ) + \sin(x + 10^\circ) < \sin x$.

38. $\sin x > \cos x$.

39. $\cos 5x + \sin 10x < 0$.

40. $\sin x \cos x < \frac{1}{4}$.

41. $\sin x > \operatorname{tg} x$.

42. (9.287) $2\sin^2 x - \sin x + \sin 3x < 1$.

43. $\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x - 2\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 4x > 8\sqrt{3}$.

44. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3\operatorname{tg} x$.

45. $8\sin^4 x - 8\sin^2 x + \sin x < 1$.

46. $3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x < \frac{1}{2}$.

47. $10^{|\sin x|} > 10^{|\cos x|}$.

48. $\frac{\cos x + 2\cos^2 x + \cos 3x}{\cos x + 2\cos^2 x - 1} > 1$.

49. $\frac{1}{\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{|\sin x|} < 1$.

50. $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) > 0$.

ГЛАВА X

# ПРИМЕРЫ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ

## § 1. Уравнения и системы

Рассмотрим примеры уравнений, которые удобнее решать приведением к системам уравнений.

1. Решить уравнение $\sqrt{x+5} = x^2 - 5$.

Решение. При возведении в квадрат обеих частей уравнения получим уравнение четвертой степени, которое не имеет целых корней. Поэтому произведем замену $\sqrt{x+5} = y$ и с учетом исходного уравнения получим равносильные системы

$$\begin{cases} \sqrt{x+5} = y, \\ y = x^2 - 5 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x + 5 = y^2, \\ x^2 - 5 = y. \end{cases}$$

Сложим соответствующие части обеих уравнений и преобразуем полученное уравнение:

$$(y^2 + y = x + x^2) \leftrightarrow (y - x + y^2 - x^2 = 0) \leftrightarrow (y - x + (y - x)(y + x) = 0) \leftrightarrow ((y - x)(1 + y + x) = 0).$$

Далее решаем две системы:

$$\text{а)}\ \begin{cases} y-x=0, \\ x^2-5=y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=x, \\ x^2-5=x \end{cases} \Rightarrow (x^2-x-5=0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}\right),$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} y+x+1=0, \\ x^2-5=y \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} y=-x-1, \\ x^2-5=-x-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2+x-4=0) \Rightarrow \left(x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right).$$

Поскольку при получении системы мы возводили в квадрат, то могли появиться посторонние корни. Проверяя выполнение условия $x^2-5\geqslant 0$, находим, что корни $x=\frac{1-\sqrt{21}}{2}$, $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ посторонние.

*Ответ:* $\left\{\frac{1+\sqrt{21}}{2};\ -\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

**2.** Решить уравнение $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$.

Решение. Произведем замену $\sqrt[3]{2-x}=z$, $\sqrt[3]{7+x}=t$, откуда, $z^3=2-x$, $t^3=7+x$. Складывая обе части этих равенств, получим $z^3+t^3=9$. Исходное уравнение примет вид $z^2+t^2-zt=3$. Далее имеем

$$\begin{cases} z^3+t^3=9, \\ z^2+t^2-zt=3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} (z+t)(z^2-zt+t^2)=9, \\ z^2+t^2-zt=3 \end{cases} \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \begin{cases} (z+t)3=9, \\ z^2+t^2-zt=3 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} z+t=3, \\ z^2+t^2-zt=3. \end{cases}$$

Решая полученную систему методом подстановки, получим

$$((3-t)^2+t^2-(3-t)t=3) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6, \\ x=1. \end{array}\right.$$

*Ответ:* $x\in\{-6;\ 1\}$.

**3.** Решить уравнение $\lg|x-1|+|\lg(x+2)|=1$.

Решение. Находим область определения, для чего решаем систему неравенств:

$$\begin{cases} x+2>0, \\ x-1\neq 0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x\neq 1. \end{cases}$$

Далее решаем уравнения

а) $(|x-1|=0)\Rightarrow(x=1)$; б) $(\lg(x+2)=0)\Rightarrow$
$\Rightarrow(x=-1)$.

Изображаем на числовой прямой полученные точки и рассматриваем уравнение в каждом из полученных интервалов, учитывая область определения.

а) $-2<x<-1$, тогда $|x-1|=1-x$, $|\lg(x+2)|=$ $=-\lg(x+2)$. Далее имеем

$$(\lg(1-x)-\lg(x+2)=1)\Rightarrow\left(\lg\left(\frac{1-x}{x+2}\right)=1\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\left(\frac{1-x}{x+2}=10\right)\Rightarrow\left(x=-\frac{19}{11}\right)$$

(решение находится в интервале $]-2;\ -1[$);

б) $-1\leqslant x<1$, тогда $|x-1|=1-x$, $|\lg(x+2)|=$ $=\lg(x+2)$, затем решаем уравнение

$$(\lg(1-x)+\lg(x+2)=1)\Rightarrow(\lg(1-x)(x+2)=1)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow((1-x)(x+2)=10)\Leftrightarrow(x^2+x+8=0)\Rightarrow(x\in\varnothing);$$

в) $x>1$, тогда $|x-1|=x-1$, $|\lg(x+2)|=\lg(x+$ $+2)$, и получим

$$(\lg(x-1)+\lg(x+2)=1)\Rightarrow((x-1)(x+2)=10),$$

откуда $x=3$ (второй корень $x=-4$ не удовлетворяет условию $x>1$).

*Ответ:* $x\in\left\{-\frac{19}{11};\ 3\right\}$.

**4.** Решить уравнение $3\cos x=3x^2+2x+7$.

Решение. Преобразуем обе части уравнения:

$$\left(\cos x=x^2+\frac{2x}{3}+\frac{7}{3}\right)\Leftrightarrow\left(\cos x=\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{9}\right).$$

Легко заметить, что $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{20}{9}\geqslant\frac{20}{9}>2$, а $|\cos x|\leqslant$ $\leqslant 1$, поэтому уравнение не имеет решений.

*Ответ:* $x\in\varnothing$.

**5.** Решить уравнение $4x^2+4x\sin(\pi xy)+1=0$.

Решение. Если решать это уравнение как квадратное относительно $x$, то $D=\sin^2\pi xy-1\leqslant 0$. Поэтому для отыскания действительных корней получаем две системы:

а) $\begin{cases}\sin(\pi xy)=1,\\ 4x^2+4x+1=0;\end{cases}$ б) $\begin{cases}\sin(\pi xy)=-1,\\ 4x^2-4x+1=0.\end{cases}$

Далее имеем

а) $\begin{cases}\sin(\pi xy)=1,\\ 4x^2+4x+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin(\pi xy)=1,\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin\left(-\frac{\pi y}{2}\right)=1,\\ x=-\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=-4n-1,\\ x=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Аналогично решая вторую систему, находим $\begin{cases}x=\frac{1}{2},\\ y=4n-1.\end{cases}$

*Ответ:* $\left\{\left(-\frac{1}{2};\ -(4n+1)\right),\left(\frac{1}{2};\ 4n-1\right),\ n\in Z\right\}$.

**6.** Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}}|x|=\frac{1}{3}(|x-2|+|x+2|)$.

Решение. Поскольку правая часть уравнения положительна, то имеем $(\log_{\frac{1}{2}}|x|>0)\Rightarrow(|x|<1,\ x\neq 0)$, но тогда $|x-2|=2-x$, $|x+2|=2+x$, следовательно, исходное уравнение принимает вид

$$\left(\log_{\frac{1}{2}}|x|=\frac{1}{3}(2-x+x+2)\right)\Rightarrow\left(|x|=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}}\right)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left(|x|=2^{-\frac{4}{3}}\right)\Leftrightarrow\left(x=\pm 2^{-\frac{4}{3}}\right).$$

**7.** Решить уравнение $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$.

Решение. Решая это уравнение как квадратное относительно $\log_2 x$, находим

$$\left(\log_2 x=\frac{1-x\pm\sqrt{(1-x)^2+4(6-2x)}}{2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\log_2 x=\frac{1-x\pm(5-x)}{2}\right).$$

Далее решаем два уравнения:

а) $(\log_2 x=-2)\Leftrightarrow\left(x=2^{-2}=\frac{1}{4}\right)$;

б) $(\log_2 x=3-x)\Leftrightarrow(x=2^{3-x})\Leftrightarrow(x2^x=2^3)$.

Это уравнение имеет очевидное решение $x=2$ (при $x<0$ уравнение не имеет решений, при $x>0$ функция $y=x2^x$ монотонно возрастает, следовательно, найденное значение $x=2$ будет единственным решением уравнения $x2^x=2^3$).

*Ответ:* $x\in\left\{\frac{1}{4};\ 2\right\}$.

Решить уравнения:

8. $8 - x2^x + 2^{3-x} - x = 0$.

9. $\log_3 (3 + \sqrt{3+x}) = \frac{2}{\log_x 3}$.

10. $\sqrt[3]{(8-x)^2} - \sqrt[3]{(8-x)(27+x)} + \sqrt[3]{(27+x)^2} = 7$.

11. $x^2 - 6x + y - 4\sqrt{y} + 13 = 0$.

12. $2^{|x|} = \sin x^2$.

13. $x^2 = -\cos x$.

14. $2 \sin x = 5x^2 + 2x + 4$.

15. $2 \cos^2 \frac{x^2+x}{6} = 2^x + 2^{-x}$.

16. $(1+\sqrt{3})^x - 2^{x-3}(2+\sqrt{3})^x = \frac{1}{2}$.

17. $2^{3x} - 8^{1-x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 3 \cdot 2^{-x+2} = 1$.

18. $\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}-1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right) x^{0,5\log_2^2 x - 7} = x^6 2^{-12}$.

19. $\log_{\frac{1}{2}} (x-1) = \sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$.

20. $5^{\log_{10} x + 1} + 5^{\log_{10} x - 1} = 2\sqrt{x}$.

21. $x + \sqrt{x^2+16} = \frac{40}{\sqrt{x^2+16}}$.

22. $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$.

## § 2. Уравнения, содержащие логарифмическую и тригонометрические функции

23. Решить уравнение $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} 3 = 1$.

Решение. Область определения данного уравнения — множество значений $x$, удовлетворяющих неравенству $\sin x > 0$. Приведем все логарифмы к основанию 2, получим

$$\left(\frac{1}{\log_2 \sin x} \cdot \frac{\log_2 3}{\log_2 \sin^2 x} = 1\right) \Rightarrow (\log_2 3 = 2 (\log_2 \sin x)^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\log_2 \sin x = \pm \sqrt{0{,}5 \log_2 3}).$$

Так как $|\sin x| \leqslant 1$, то положительный корень нужно отбросить. Далее рассмотрим равносильные уравнения

$$\left(\log_2 \sin x = -\sqrt{0{,}5 \log_2 3} = -\sqrt{\log_2 \sqrt{3}}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\sin x = 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{3}}}\right) \Rightarrow \left(x = (-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{3}}} + n\pi\right).$$

*Ответ:* $x \in \left\{(-1)^n \arcsin 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{3}}} + n\pi\right\}$.

**24.** Решить уравнение

$$\log_n x + \log_{\sqrt{n}} x + \log_{\sqrt[3]{n}} x + \cdots + \log_{\sqrt[n]{n}} x = \frac{n+1}{2};\ n > 0,\ n \neq 1.$$

Решение. Приводя все логарифмы к основанию $n$, получим

$$\left(\log_n x + 2\log_n x + 3\log_n x + \cdots + n\log_n x = \frac{n+1}{2}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(1 + 2 + 3 + \cdots + n)\log_n x = \frac{n+1}{2}\right).$$

Используя формулу суммы членов арифметической прогрессии, получим

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}\log_n x = \frac{n+1}{2}\right) \Rightarrow \left(\log_n x = \frac{1}{n}\right) \Rightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(x = n^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{n}\right).$$

*Ответ:* $x \in \{\sqrt[n]{n}\}$.

**25.** Решить уравнение $\log_4 x - \log_4^2 x + \log_4^3 x - \cdots = 0{,}4$ при условии $|\log_4 x| < 1$.

Решение. Обозначая $\log_4 x = y$, $(|y| < 1)$, получим уравнение

$$y - y^2 + y^3 - \cdots = 0{,}4.$$

Левая часть уравнения представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой $a_1 = y$, а $q = -y$. Вычисляя эту сумму, получим равносильные уравнения

$$\left(\frac{y}{1+y} = 0{,}4\right) \Rightarrow \left(y = \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \left(\log_4 x = \frac{2}{3}\right) \leftrightarrow \left(x = \sqrt[3]{16}\right).$$

*Ответ:* $x \in \{\sqrt[3]{16}\}$.

26. Решить уравнение $\arcsin\sqrt{3^{3-2x}} - \arcsin 3^{1-x} = \frac{\pi}{6}$.

Решение. Производим замену $3^{1-x} = y$, тогда $\sqrt{3^{3-2x}} = \sqrt{3 \cdot 3^{2(1-x)}} = \sqrt{3y^2} = y\sqrt{3}$ (поскольку $y > 0$). Исходное уравнение принимает вид

$$\left(\arcsin(y\sqrt{3}) - \arcsin y = \frac{\pi}{6}\right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \left(\arcsin(y\sqrt{3}) = \frac{\pi}{6} + \arcsin y\right).$$

Далее рассматриваем цепочку равносильных уравнений

$$\left(\sin(\arcsin(y\sqrt{3})) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \arcsin y\right)\right) \Rightarrow \left(y\sqrt{3} = \right.$$

$$\left. = \frac{1}{2}\sqrt{1-y^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}y\right) \Rightarrow (y\sqrt{3} = \sqrt{1-y^2}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3y^2 = 1 - y^2) \Rightarrow \left(y = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(3^{1-x} = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3^x = 6) \Leftrightarrow (x = \log_3 6).$$

*Ответ:* $x \in \{\log_3 6\}$.

Решить уравнения:

27. $|\lg(x+2)| - |\lg(x+3) - 1| = 1{,}2$.

28. $\log_{0,5\cos^2 x}(2\cos x) = 0{,}5$.

29. $3^{k \cdot \operatorname{arcctg} x} + 4^{k \cdot \operatorname{arcctg} x} = 5^{k \cdot \operatorname{arcctg} x}$.

30. $\log_{\frac{1}{8\cos^2 x}} \sin x = \frac{1}{2}$.

31. $\arccos 3^{2x+1} + \arccos\sqrt{3^{4x+3}} = \frac{\pi}{2}$.

32. $\sqrt[3]{\lg(\arcsin 2x) + 1} - \sqrt[3]{\lg(\arcsin 2x) - 1} = 2$.

33. $4^{\cos x} - 2^{\cos x - 1} = \frac{3}{4}$.

34. $(\cos 2x)^{2\cos 3x + 4\cos x - 1} = \sec 2x$.

35. $\sin(\pi \lg x) + \cos(\pi \lg x) = 1$.

36. $1 + \log_3 \sin x + \log_3^2 \sin x + \log_3^3 \sin x + \ldots = \frac{2}{3}$.

37. $\sin^2 2\sqrt{-x} = \frac{1}{2}$.

38. $\log_{\sqrt[3]{x}} x + \log_{\sqrt[3]{x}} x + \log_{\sqrt[3]{x}} x + \cdots +$

$$+ \log_{\sqrt[3]{x}} x = 36.$$

39. $3^{\log_x x+\log_{x^2}x^2+\log_{x^3}x^3+\cdots+\log_{x^n}x^n}=27x^{30}$.

40. $2^{x-1}+2^{x-4}+2^{x-2}=6{,}5+3{,}25+1{,}625+\ldots$.

41. $2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}-\frac{3}{4}\cdot 0{,}25^{\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}-1}=-2$.

42. $\lg x+\log_{\sqrt{10}}x+\log_{\sqrt[3]{10}}x+\cdots+\log_{\sqrt[10]{10}}x=5{,}5$.

43. $\frac{\lg x^2}{\lg^2 x}+\frac{\lg x^3}{\lg^3 x}+\frac{\lg x^4}{\lg^4 x}+\ldots=8$.

44. $3^{x-5}+3^{x-7}+3^{x-9}=45{,}5+22{,}75+11{,}375+\ldots$.

45. $5^{2+4+6+\cdots+2x}=0{,}04^{-28}$.

46. $16^{\sin x}=\sqrt[\cos x]{4}$.

47. $(\cos x)^{\sin^2 x-1{,}5\sin x+0{,}5}=1$.

## § 3. Неравенства

48. Решить неравенство $\arccos(1-2x)<\arccos\frac{1}{x-1}$.

Р е ш е н и е. Для нахождения области определения данного неравенства нужно решить систему неравенств
$\begin{cases}|1-2x|\leqslant 1,\\ \left|\frac{1}{x-1}\right|\leqslant 1.\end{cases}$

Функция $y=\arccos x$ изменяется в интервале $[0;\ \pi]$, а в этом интервале функция $y=\cos x$ убывающая, поэтому

$$\cos(\arccos(1-2x))>\cos\left(\arccos\frac{1}{x-1}\right).$$

Откуда

$$\left(1-2x>\frac{1}{x-1}\right)\Rightarrow(x<1).$$

Далее имеем

$$\begin{cases}x<1,\\ -1\leqslant 1-2x\leqslant 1,\\ |x-1|\geqslant 1\end{cases}\rightarrow\begin{cases}x<1,\\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \left[\begin{array}{l}x\geqslant 2,\\ x\leqslant 0\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow(x=0).$$

*Ответ:* $x\in\{0\}$.

**49.** Решить неравенство $\cos\left(2\pi\sin\frac{\pi x}{2}\right)<-\frac{1}{2}$.

Решение. Используя решение неравенств вида $\cos x<a$ (см. гл. IX), получим

$$\left(\frac{2\pi}{3}+2n\pi<2\pi\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{4\pi}{3}+2n\pi\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{3}+n<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{2}{3}+n\right).$$

Так как $|\sin x|\leqslant 1$, то $n$ может принимать только значения 0 и $-1$. Тогда имеем

$$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{3}<\sin\frac{\pi x}{2}<\frac{2}{3},\\ -\frac{2}{3}<\sin\frac{\pi x}{2}<-\frac{1}{3}\end{array}\right.\Rightarrow\left(\frac{1}{9}<\sin^2\frac{\pi x}{2}<\frac{4}{9}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{9}<\cos\pi x<\frac{7}{9}\right).$$

Решая это двойное неравенство, получим

$$\pm\arccos\frac{1}{9}+2n\pi<\pi x<\pm\arccos\frac{7}{9}+2n\pi.$$

*Ответ:* $x\in\left]2n-\frac{\arccos\frac{1}{9}}{\pi};\ 2n-\frac{\arccos\frac{7}{9}}{\pi}\right[\cup\left]2n+\frac{\arccos\frac{1}{9}}{\pi};\ 2n+\frac{\arccos\frac{7}{9}}{\pi}\right[$.

**50.** Решить неравенство $\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})\times\log_{\sqrt{3}}\frac{9}{1+2^{\sqrt{x}}}<3$.

Решение. Преобразуем левую часть неравенства

$$\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})\left(\log_{\sqrt{3}}9-\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})\right)=$$
$$=\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})\left(4-\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})\right).$$

После замены $\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})=y$ получим равносильное неравенство $(y(4-y)<3)\Rightarrow(y^2-4y+3>0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y>3,\\ y<1.\end{array}\right.$

Далее решаем неравенства

$$(\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})<1) \Leftrightarrow (1+2^{\sqrt{x}}<\sqrt{3}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2^{\sqrt{x}}<\sqrt{3}-1);\ (\log_{\sqrt{3}}(1+2^{\sqrt{x}})>3) \Leftrightarrow (1+2^{\sqrt{x}}>$$

$$>(\sqrt{3})^3) \Rightarrow (2^{\sqrt{x}}>\sqrt{27}-1).$$

Поскольку $2^{\sqrt{x}} \geqslant 1$, то первое неравенство не имеет решения. Решая второе неравенство, получим

$$(\sqrt{x}>\log_2(\sqrt{27}-1)) \Rightarrow (x>\log_2^2(\sqrt{27}-1)).$$

*Ответ:* $x \in ]\log_2^2(\sqrt{27}-1); +\infty[$.

**51.** Решить неравенство $\operatorname{ctg}(2^{-\sqrt{x-1}})<1$.

Решение. Используя решение неравенств вида $\operatorname{ctg} x<a$ (см. гл. IX), получим систему неравенств $\frac{\pi}{4}+n\pi<$ $<2^{-\sqrt{x-1}}<\pi+n\pi$. Поскольку $0<2^{-\sqrt{x-1}} \leqslant 1$ при всех $x \geqslant 1$, то исходное неравенство равносильно двойному неравенству

$$\left(\frac{\pi}{4}<2^{-\sqrt{x-1}}<\pi\right) \Rightarrow \left(\log_2\frac{\pi}{4}<-\sqrt{x-1}<\log_2\pi\right).$$

Поскольку $\log_2\pi>0$, то имеем

$$(-\sqrt{x-1}>\log_2\pi-2) \Rightarrow (\sqrt{x-1}<2-\log_2\pi).$$

Возводя обе части неравенства в квадрат, получим систему неравенств

$$0 \leqslant x-1<(2-\log_2\pi)^2.$$

*Ответ:* $x \in [1;\ 1+(2-\log_2\pi)^2[$.

**52.** Решить неравенство $|x^2-2x-3|-2>|2x-1|$.

Решение. Находим корни выражений, стоящих под знаком модуля, и изображаем их на числовой прямой. Затем решаем данное неравенство в каждом из полученных интервалов:

а) $x<-1$, тогда $|x^2-2x-3|=|(x-3)(x+1)|=$ $=x^2-2x-3$ и $|2x-1|=-(2x-1)$, следовательно, ис-

ходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}(x^2-2x-3)-2+(2x-1)>0,\\ x<-1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{6},\\ x<-\sqrt{6},\end{array}\right.\Rightarrow (x<-\sqrt{6});\\ x<-1\end{cases}$$

б) $-1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$, тогда $|x^2-2x-3|=-(x^2-2x-3)$, $|2x-1|=-(2x-1)$, и получаем равносильную систему

$$\begin{cases}x^2-4x<0,\\ -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<x<4,\\ -1\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\left(0<x\leqslant\frac{1}{2}\right);$$

в) $\frac{1}{2}<x\leqslant 3$, тогда $|x^2-2x-3|=-(x^2-2x-3)$, $|2x-1|=2x-1$, и имеем

$$\begin{cases}x^2-2<0,\\ \frac{1}{2}<x\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2},\\ \frac{1}{2}<x\leqslant 3\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}<x<\sqrt{2}\right);$$

г) $x>3$, тогда $|x^2-2x-3|=x^2-2x-3$, $|2x-1|=2x-1$, и получаем систему

$$\begin{cases}x^2-4x-4>0,\\ x>3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>2+\sqrt{8},\\ x<2-\sqrt{8},\end{array}\right.\Rightarrow (x>2+\sqrt{8}).\\ x>3\end{cases}$$

*Ответ:* $x\in\,]-\infty;-\sqrt{6}[\cup]0;\sqrt{2}[\cup]2+\sqrt{8};+\infty[$.

Решить неравенства:

**53.** $\sqrt{\frac{4x}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{4x}}>\frac{3}{2}$. **54.** $-6<\frac{3}{2x-3}<-2$.

**55.** $(2x^2+x+1)^{2x^2+x+1}<1$.

**56.** $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<\log_{\frac{1}{2}}\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{x-1}$.

**57.** $\cos^2\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)>\frac{3}{4}$. **58.** $\sin\frac{\pi}{x-1}<\frac{1}{\sqrt{2}}$.

**59.** $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}>\frac{2}{\sqrt{3}}$. **60.** $\operatorname{tg}x>\operatorname{ctg}3x$.

**61.** $\arcsin\left(1-2x\right)>\frac{\pi}{6}$. **62.** $\arccos\sqrt{1-x^2}>\frac{\pi}{4}$.

63. $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 \frac{x^2-2x}{x-3} < 0$. 64. $(0{,}5)^{\sqrt{x^4-2x^2+1}} < 0{,}5^{1-x}$

65. $\left(\frac{3}{2}\right)^{1+x} + \left(\frac{3}{2}\right)^{1-x} > \frac{15}{4}$.

66. $\lg\sqrt{2-x} - \lg\sqrt{4-x^2} + 3\lg\sqrt{2+x} < 2$.

67. $\log_x 8 - 3\log_{0,5} x > 10$. 68. $(2x^2-x+1)^{x+1} > 1$.

69. $\log_{\frac{1}{x}} \frac{x}{x+2} < 1$.

70. $\left(\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}\right)^x > 10$.

71. $(1{,}25)^{1-\log_5^2 x} > (0{,}64)^{2+\log_{\sqrt{2}} x}$.

72. $x^{3\lg^2 x - 2{,}5\lg x} < \sqrt{10}$.

73. $\log_2(2^x-1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) < -2$.

74. $\sin\frac{2-x}{3} > \frac{1}{2}$. 75. $\cos\sqrt{1-x} < \frac{1}{\sqrt{2}}$.

76. $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3(x-1)} > \sqrt{3}$. 77. $\log_3(\operatorname{ctg}(2\pi \operatorname{tg} x)) < 0$.

78. $\arcsin\left(1-x-x^2\right) < \frac{\pi}{6}$. 79. $\operatorname{arcctg}\frac{x}{x-1} < 2$.

80. $\operatorname{tg}(2\arcsin\sqrt{x}) < \sqrt{3}$. 81. $|\log_{\frac{1}{2}}(1-x)| > 2$.

82. $\log_4|1-2x| < 3$. 83. $0{,}5^{|2x+3|} < 5$.

84. $2|x+1| < |x-2| + 3x + 1$.

85. $|\sqrt{x-3}-1| + |\sqrt{x+5}-1| > 2$.

### § 4. Примеры с параметрами

Рассмотрим несколько примеров алгебраических уравнений, коэффициентами которых являются буквенные величины, которые назовем параметрами.

**86.** При каких целых $k$ корни квадратного уравнения $kx^2 + (2k-1)x + k - 2 = 0$ рациональны?

Решение. Корни этого уравнения будут рациональными, когда дискриминант представляет собой квадрат целого числа. Получаем уравнение

$$(2k-1)^2 - 4k(k-2) = m^2, \text{ где } k \in Z,\ m \in Z.$$

Далее имеем

$$(4k+1=m^2)\Rightarrow\left(k=\frac{m^2-1}{4}\right).$$

Это уравнение имеет решение только при нечетных $m$, т. е. при $m=2n+1$, где $n\in Z$. Таким образом, имеем

$$k=\frac{(2n+1)^2-1}{4}=n^2+n.$$

*Ответ:* $k=n^2+n$, $n\in Z$.

При решении иррациональных уравнений с параметрами необходимо находить область определения неизвестных при каждом значении параметров.

Рассмотрим примеры.

**87.** Решить уравнение $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

Р е ш е н и е. Находим область определения, решая систему неравенств:

$$\begin{cases} x\geqslant 0,\\ a+x\geqslant 0,\\ a\geqslant\sqrt{a+x}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} 0\leqslant x\leqslant a^2-a \text{ при } a\geqslant 1,\\ x=0 \text{ при } a=0.\end{array}\right.$$

Возведем обе части уравнения в квадрат, получим

$$(a-\sqrt{a+x}=x^2)\Rightarrow(\sqrt{a+x}=a-x^2).$$

Это уравнение имеет решение при условии $a-x^2\geqslant 0$. Обозначим $\sqrt{a+x}=y$, тогда $a+x=y^2$ и запишем систему уравнений:

$$\begin{cases} a+x=y^2,\\ a-x^2=y.\end{cases}$$

Вычитая почленно из первого равенства второе, получим

$$\begin{cases} x+x^2=y^2-y,\\ a-x^2=y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x^2-y^2+x+y=0,\\ a-x^2=y\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(x+y)(x-y+1)=0,\\ a-x^2=y\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x+y=0,\\ a-x^2=y,\end{cases}\\ \begin{cases} x-y+1=0,\\ a-x^2=y\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ x^2+x+(1-a)=0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=0, \\ x=0, \\ y=0, \end{cases} \\ \begin{cases} y=x+1, \\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Учитывая условие $a-x^2\geqslant 0$, находим

$$x=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2},\quad a\geqslant 1.$$

*Ответ:* $x=0$ при $a=0$, $x=\dfrac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ при $a\geqslant 1$.

88. Решить неравенство $x-\dfrac{a}{1-a}<1-\dfrac{x-1}{a-1}$.

Решение. Находим область определения: $a\neq 1$. После преобразований получим

$$\frac{x(1-a)-a}{1-a}<\frac{a-x}{a-1}.$$

Рассмотрим два случая:

а) $a<1$, тогда получим равносильные неравенства

$$(x(1-a)-a<x-a)\Rightarrow(-ax<0)\Rightarrow(ax>0).$$

Следовательно, если $a<0$, то $x<0$, если $a>0$, то $x>0$, если $a=0$, то решений нет;

б) $a>1$, тогда получим

$$(a-x(1-a)<a-x)\Rightarrow(ax<0)\Rightarrow(x<0).$$

*Ответ:* $x<0$ при $\left[\begin{array}{l} a>1, \\ a<0; \end{array}\right.$ $x>0$ при $0<a<1$; $x\in\varnothing$ при $a=0$.

89. Решить неравенство $2\sqrt{x+a}>x+1$.

Решение. Находим область определения: $x+a\geqslant 0$. Исходное неравенство эквивалентно двум системам:

а) $\begin{cases} x+1<0, \\ x+a\geqslant 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+1\geqslant 0, \\ 4(x+a)>(x+1)^2. \end{cases}$

Решение первой системы: $-a\leqslant x<-1$, откуда $a>1$.

Решая вторую систему, получаем

$$\begin{cases} 1-2\sqrt{a}<x<1+2\sqrt{a}, \\ x>-1. \end{cases}$$

Анализируя полученные неравенства, приходим к выводу, что $a > 0$. При $0 < a \leqslant 1$ получаем решение $1 - 2\sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}$. При $a > 1$ получаем объединение решений $]-a; -1[ \cup ]-1; 1 + 2\sqrt{a}[$.

*Ответ:* $\begin{cases} x \in ]1 - 2\sqrt{a};\ 1 + 2\sqrt{a}[, & 0 < a \leqslant 1 \\ x \in ]-a;\ 1 + 2\sqrt{a}[, & a > 1, \end{cases}$

Наличие параметров в показательно-логарифмических неравенствах существенно влияет на область определения и выбор решений. Приведем примеры.

**90.** Решить неравенство $\log_a (x - a) > \log_{\frac{1}{a}} (x + a)$.

Р е ш е н и е. Находим область определения: $x > a$, $a > 0$, $a \neq 1$. После преобразований получаем равносильные неравенства

$$(\log_a (x^2 - a^2) > 0) \Rightarrow (\log_a (x^2 - a^2) > \log_a 1).$$

Рассмотрим два случая:

а) $a > 1$, тогда $(x^2 - a^2 > 1) \Rightarrow (x > \sqrt{1 + a^2})$;

б) $0 < a < 1$, тогда $(x^2 - a^2 < 1) \Rightarrow (a < x < \sqrt{1 + a^2})$.

*Ответ:* $\begin{cases} x > \sqrt{1 + a^2} \text{ при } a > 1, \\ a < x < \sqrt{1 + a^2} \text{ при } 0 < a < 1. \end{cases}$

Решить уравнения:

**91.** $x = \sqrt{x^2 + 2(a + 1)x + 4a} + a$.

**92.** $\sqrt{x - 3} = a - \sqrt{x - 7}$. **93.** $2x + ax + \sqrt{x} = 0$.

**94.** $x = a + \sqrt{a + \sqrt{x}}$, $a > 1$. **95.** $\sqrt{x + a} = \sqrt{x} + \sqrt{b}$.

**96.** $\sqrt{x - 2a} = 2 + \sqrt{x + 2b}$.

**97.** $\sqrt[5]{a + x} + \sqrt[5]{a - x} = \sqrt[5]{2a}$.

**98.** $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{a - x} = \sqrt[4]{b}$, $b > 0$.

**99.** $\sqrt[3]{a + x} - \sqrt[3]{a - x} = \sqrt[6]{a^2 - x^2}$.

**100.** $2 \log_x a + \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a = 0$, $a > 0$.

**101.** $\log_a x \log_b x = \log_a b$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

Решить системы:

**102.** $\begin{cases} x^2 - xy = -ay, \\ y^2 - xy = 4ax. \end{cases}$

**103.** $\begin{cases} x^3 + y^3 = a, \\ x^2y + xy^2 = b, \end{cases}$ $a > 0,\ b > 0.$

**104.** $\begin{cases} \log_x (ay) = p, \\ \log_y (bx) = q. \end{cases}$ **105.** $\begin{cases} \log_a x - \log_{a^2} y = m, \\ \log_{a^3} x - \log_{a^4} y = n. \end{cases}$

**106.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy = a^2, \\ x + y + \sqrt{xy} = b. \end{cases}$

**107.** При каких действительных значениях $a$ сумма квадратов корней уравнения $x^2 + ax + a - 2 = 0$ будет наименьшей?

**108.** При каких $k$ уравнение $x^2 + 2kx\sqrt{k^2 - 3} + 4 = 0$ имеет равные корни?

**109.** Найти $m$ и $n$, а также $x_3$, если известно, что $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$ — корни уравнения $2x^3 + mx^2 - 13x + n = 0$.

**110.** Найти $m$ для уравнения $6x^3 - 7x^2 - 16x + m = 0$, если $x_1 = 2$. Найти $x_2$, $x_3$

ГЛАВА XI

# ПРЕДЕЛЫ

## § 1. Основные формулы

Если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$ и $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$, $\beta(x)$ — эквивалентные бесконечно малые (будем обозначать $\alpha(x) \sim \beta(x)$).

При $x \to 0$

$$\begin{gathered} \sin x \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \\ \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x. \end{gathered} \tag{1}$$

При $a > 1$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = \infty. \tag{2}$$

При $0 < a < 1$

$$\lim_{x \to \infty} a^x = 0. \tag{3}$$

При любых $a$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a}{x^n} = 0, \ n > 0. \tag{4}$$

Если $\lim\limits_{x\to c} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to c} \varphi(x) = b$, то

$$\lim_{x\to c}(f(x) + \varphi(x)) = a + b, \quad (5)$$

$$\lim_{x\to c}(f(x)\,\varphi(x)) = ab, \quad (6)$$

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{a}{b} \text{ при } b \neq 0. \quad (7)$$

## § 2. Вычисление пределов

**1.** Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n\left(1+\frac{2}{3n}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3n}\right)}.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3n} = 0$, то получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3\left(1+\frac{2}{3n}\right)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{3n}\right)} = \frac{1}{3}.$$

**2.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-2x}{1+x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-2x}{1+x} = \frac{1-2}{1+1} = -\frac{1}{2}.$$

**3.** (14.367) Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

Решение. Вынося за скобки в числителе $3^{n+1}$, а в знаменателе $3^n$ и учитывая (3), получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)} = 3\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1} = 3.$$

**4.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{1+x}=\frac{1-1}{1+1}=0.$$

Вычисление пределов в примерах, аналогичных примерам 2 и 4, не представляет трудностей. Вычисление пределов в примерах, подобных 1 и 3, приводит к раскрытию неопределенных выражений вида «$\frac{\infty}{\infty}$». Можно сформулировать следующее правило для вычисления пределов в аналогичных примерах: *предел вида «$\frac{\infty}{\infty}$» равен пределу отношения старших степеней числителя и знаменателя.* Приведем примеры.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+2}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$$

6. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2-2x+5}$.

Решение. После преобразований получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{3x^2-2x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{3x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{3x}=0.$$

7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^4-5x}}{2x^2+4x-5}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x-2\sqrt{x}+\sqrt{x^4-5x}}{2x^2+4x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\frac{1}{2}.$$

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2\sqrt{x}-3}{1-2\sqrt{x}}$.

Решение. После преобразований получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x-2\sqrt{x}-3}{1-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-2\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)=-\infty.$$

Вычислить пределы:

9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+1}{x-1}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-x-2x^2}{1-2x+3x^2}$.

11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^3+4x}}{x}$.

12. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{2x+1}$.

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+8}{3-3x-2x^4}$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+\sqrt[3]{n^2-3n}}{\sqrt[3]{n^6+8n-1}}$.

15. (1.368) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\sin x}{x^2+1}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x+\frac{1}{x}}.$$

Поскольку $|\sin x|\leqslant 1$, а $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\infty$, то

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x+\frac{1}{x}}=0.$$

16. (14.379) Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(x-\sqrt{x^2+5x})$.

Решение. Непосредственная подстановка приводит к неопределенности вида «$\infty-\infty$», поэтому умножим и разделим на сопряженное выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-\sqrt{x^2+5x})(x+\sqrt{x^2+5x})}{x+\sqrt{x^2+5x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-5x}{x+\sqrt{x^2+5x}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{x+x\sqrt{1+\frac{5}{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x}{2x}=-\frac{5}{2}.$$

17. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+2^2+\ldots+2^n}{1+5+5^2+\ldots+5^n}$, где $n\in N$.

Решение. Применяя формулу для вычисления суммы геометрической прогрессии, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-1}:\frac{5^{n+1}-1}{5-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{4\cdot 2^{n+1}}{5^{n+1}}=$$
$$=4\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}=0.$$

18. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)\sin\dfrac{3}{x}$.

Решение. Так как при $x\to\infty$ имеем $\dfrac{3}{x}\to 0$, то $\sin\dfrac{3}{x}\sim\dfrac{3}{x}$.

Получим

$$\lim_{x\to\infty}(x+2)\sin\frac{3}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{(x+2)3}{x}=3.$$

Вычислить пределы:

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{2^x}$.

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\cos 2x}{1-x}$.

21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{1-x}$.

22. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-3x})$.

23. $\lim\limits_{x\to-\infty}x(\sqrt{9x^2+4}+3x)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+2}-\sqrt{x^2+3x})$.

25. $\lim\limits_{x\to\infty}x\arcsin\left(\dfrac{\pi}{x+1}\right)$.

26. $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+3)\operatorname{tg}\dfrac{2}{x}$.

27. (14.391) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+3+5+\cdots+(2n+1)}{n+1}\right)$, $n\in N$.

28. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2}\right)$.

29. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot n!+(n+1)!}{(n+2)!+n}$.

30. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2+3x-10}$.

Решение. Непосредственная подстановка приводит к неопределенному выражению вида «$\frac{0}{0}$». Выполним преобразования:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x}{x^2+3x-10}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x-2)(x+5)}=\lim_{x\to 2}\frac{x}{x+5}=\frac{2}{7}.$$

31. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{2x^2}$.

Решение. Здесь также имеем дело с неопределенностью вида «$\frac{0}{0}$». Преобразуем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}.$$

Так как $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, то $\sin^2 \frac{x}{2} \sim \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$. Далее имеем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}.$$

**32.** Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \sqrt{2x+1}}{\sin 2x}$.

Решение. Непосредственная подстановка приводит к неопределенному выражению вида «$\frac{0}{0}$». Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряженное выражение $1 + \sqrt{2x+1}$ и используем эквивалентные бесконечно малые ($\sin 2x \sim 2x$):

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \sqrt{2x+1})(1 + \sqrt{2x+1})}{\sin 2x (1 + \sqrt{2x+1})} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2x - 1}{2x (1 + \sqrt{2x+1})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-2x}{2x (1 + \sqrt{2x+1})} = -\frac{1}{2}.$$

**33.** (14.399) Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}}$.

Решение. Снова имеем дело с неопределенностью вида «$\frac{0}{0}$».

Чтобы получить разность кубов в знаменателе дроби, выполним преобразования:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \left(\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(8-x)(8+x)} + \sqrt[3]{(8+x)^2}\right)}{\left(\sqrt[3]{8-x} - \sqrt[3]{8+x}\right)\left(\sqrt[3]{(8-x)^2} + \sqrt[3]{(8-x)(8+x)} + \sqrt[3]{(8+x)^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{12x}{-2x} = -6.$$

**34.** Вычислить $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sqrt{2} - 2\cos x}{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}$.

Решение. Произведем замену $x - \frac{\pi}{4} = t$, тогда $t \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{4}$. Имеем

$$\lim_{t \to 0} \frac{\sqrt{2} - 2\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin t} = 2 \lim_{t \to 0} \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin t} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin t} = 2\lim_{t\to 0}\frac{2\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}} =$$

$$= 2\lim_{t\to 0}\frac{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\frac{t}{2}} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Вычислить пределы:

35. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-1}{x+1}$.

36. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3-x^2+2x+4}{x^2-3x-4}$.

37. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+2\sqrt{x}-3}{x-5\sqrt{x}+4}$.

38. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\cos\dfrac{2}{x}\right)$.

39. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3+2x}-\sqrt{x+2}}{3x+3}$.

40. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-5+2x^2}{\sqrt{x+8}-\sqrt{9x}}$.

41. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos 2x}{\sin x-\cos x}$.

42. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{\sqrt[3]{2+x}-\sqrt[3]{3x+2}}$.

43. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$.

44. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1+2\cos x}{\cos 2x+1}$.

45. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{4+x}-2}$.

46. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\operatorname{tg}x+2x^3}{\sin 2x-\sin x-3x^3}$.

47. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1-\sin x}{1+\cos 2x}\right)\dfrac{\cos 2x}{\operatorname{tg}2x-1}$.

48. $\lim\limits_{x\to 2\pi}\left(\dfrac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\cos x-1}\right)\left(\dfrac{1+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right)$.

49. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x+\arcsin x}{x+2\operatorname{tg}x}$.

Решение. Так как при $x\to 0$ $\arcsin x\sim x$, $\operatorname{tg}x\sim x$, то имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{x+\arcsin x}{x+2\operatorname{tg}x} = \lim_{x\to 0}\frac{x+x}{x+2x} = \frac{2}{3}.$$

**50.** Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x-\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x^2\sin x}$.

Решение. Выполним преобразования

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x-\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x}}{x^2\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\left(\frac{\cos 2x-1}{x^2\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x\,(-2\sin^2 x)}{x^2\sin x}.$$

Далее имеем

$$-2\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x\sin^2 x}{x^2\sin x}=-2\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x^2}{x^2\cdot x}=-4.$$

**51.** (14.417) Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{2-\sqrt{5-x^2}}$.

Решение. Умножим числитель и знаменатель на сопряженное выражение и выполним преобразования:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})}{(2-\sqrt{5-x^2})(2+\sqrt{5-x^2})}=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)(2+\sqrt{5-x^2})}{4-(5-x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{x^2-1}\lim_{x\to 1}(2+\sqrt{5-x^2})=4\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}.$$

Произведем замену $x-1=t$, тогда $t\to 0$ при $x\to 1$. Далее имеем

$$4\lim_{x\to 1}\frac{\sin(x-1)}{(x-1)(x+1)}=4\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t(t+2)}=4\lim_{t\to 0}\frac{t}{t(t+2)}=4\cdot\frac{1}{2}=2.$$

Вычислить пределы:

**52.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+7x^2-2}{6x^3-4x+3}$.

**53.** $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{\sqrt{x-2}-\sqrt{4-x}}$.

**54.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{4}}{x^2}$.

**55.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+4x-x^4}{x+3x^3+2x^4}$.

**56.** $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$.

**57.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x^2}$.

**58.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^6-x^3+2x}{2x^6-1}$.

**59.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+10}-\sqrt{4-x}}{2x^2-x-21}$.

**60.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$.

**61.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}2x}{5x}$.

**62.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$.

**63.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4-4x^3+3}{2x^4+1}$.

64. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$.

65. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{3x^2+4x+1}{\sqrt{x+3}-\sqrt{5+3x}}$.

66. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-1}{x\operatorname{tg} 2x}$.

67. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-6x^2+2}{x^4+4x-2}$.

ГЛАВА XII

# ПРОИЗВОДНАЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ

## § 1. Основные формулы и определения

### Правила дифференцирования

$$(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x), \tag{1}$$

$$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+v'(x)u(x), \tag{2}$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{(v(x))^2}, \tag{3}$$

$$(cu(x))'=c\cdot u'(x). \tag{4}$$

### Таблица производных

$$(c)'=0,\ c=\text{const},\ (x)'=1,\ (\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}, \tag{5}$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1},\ \text{где}\ \alpha\ —\ \text{действительное число}, \tag{6}$$

Если $h(x)=g(f(x))$, то

$$h'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x), \tag{7}$$

$$(\sin x)'=\cos x, \tag{8}$$

$$(\cos x)'=-\sin x, \tag{9}$$

$$(\operatorname{tg} x)'=\sec^2 x, \tag{10}$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\operatorname{cosec}^2 x, \tag{11}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a, \tag{12}$$

$$(e^x)'=e^x, \tag{13}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \tag{14}$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}. \tag{15}$$

*Геометрический смысл производной:* производная функции $y=f(x)$ в точке $x=x_0$ ($f'(x_0)$) равна угловому ко-

эффициенту касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$. Уравнение касательной, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$, имеет вид

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0). \qquad (16)$$

Если функция $f(x)$ имеет положительную производную в каждой точке интервала $[a; b]$, то функция возрастает на этом интервале.

Если функция $f(x)$ имеет отрицательную производную в каждой точке интервала, то эта функция убывает на этом интервале.

Внутренние точки области определения $f(x)$, в которых производная равна нулю или не существует, называют *критическими точками функции* $f(x)$.

*Достаточные условия существования экстремума:*

1) если $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$, $f'(x) > 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) < 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка $x_0$ является *точкой максимума* функции $f(x)$;

2) если $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $f'(x) < 0$ на интервале $]a; x_0[$ и $f'(x) > 0$ на интервале $]x_0; b[$, то точка $x_0$ является *точкой минимума* функции $f(x)$.

## § 2. Решение примеров и задач

**1.** Вычислить производную функции $y = (1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}$.

Решение. Воспользуемся формулами (6) и (7):

$$y' = \left((1 + \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2}(1 + \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}}(1 + \sin^2 x)' = -\frac{1}{2}(1 + \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2\sin x \cos x = -\frac{1}{2} \times (1 + \sin^2 x)^{-\frac{3}{2}} \sin 2x.$$

**2.** Найти $y'$, если $y = e^{-x^2} \ln x$.

Решение. Применяя формулу (2), имеем

$$y' = (e^{-x^2})' \ln x + (e^{-x^2})(\ln x)' = e^{-x^2}(-2x) \ln x + e^{-x^2} \times \frac{1}{x}.$$

**3.** Найти $y'$, если $y = \sin^2 x \sin(x^2)$.

Решение. Применяя формулы (2) — (8), имеем

$$y' = (\sin^2 x)' \sin(x^2) + \sin^2 x (\sin(x^2))' = 2 \sin x \cos x \times \\ \times \sin(x^2) + \sin^2 x \cos(x^2) \cdot 2x.$$

**4.** Вычислить $y'$, если $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$.

Решение. Запишем данное выражение в виде

$$y = (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{\frac{1}{2}}.$$

Применяя формулу (6), имеем

$$y' = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x + \sqrt{x}}\right)^{-\frac{1}{2}} (x + \sqrt{x + \sqrt{x}})'.$$

Далее, применяя формулу (1), получим

$$y' = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}(x + \sqrt{x})'\right) = \\ = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x + \sqrt{x}})^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x + \sqrt{x}}}\right).$$

**5.** Найти $y'$, если $y = \sqrt[3]{\log_3 \sin \frac{2x+3}{3}}$.

Решение. Заменим кубический корень дробным показателем, и применив последовательно формулу (7), находим

$$y' = \frac{1}{3}\left(\log_3 \sin \frac{2x+3}{3}\right)^{-\frac{2}{3}} \left(\log_3 \sin \frac{2x+3}{3}\right)'.$$

Далее, применяя формулы (14), (8) и (4), находим производную:

$$\left(\log_3 \sin \frac{2x+3}{3}\right)' = \frac{1}{\left(\sin \frac{2x+3}{3}\right) \ln 3} \left(\sin \frac{2x+3}{3}\right)' = \\ = \frac{1}{\ln 3 \left(\sin \frac{2x+3}{3}\right)} \cos \frac{2x+3}{3} \cdot \left(\frac{2x+3}{3}\right)' = \frac{1}{\ln 3} \times \\ \times \operatorname{ctg} \frac{2x+3}{3} \cdot \frac{2}{3}.$$

Подставив найденную производную в выражение для $y'$, получим

$$y' = \frac{2}{9 \ln 3} \operatorname{ctg} \frac{2x+3}{3} \left( \log_3 \sin \frac{2x+3}{3} \right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Найти производные функций:

6. $y = (3 - 4x)^5$. 7. $y = \sqrt[3]{\frac{2x-3}{x}}$.

8. (14.429) $y = (x^4 - x^2 + 1)^3$.

9. (14.430) $y = \frac{x^3 - 3x^2 + 1}{x - 1}$.

10. $y = \sqrt[5]{\operatorname{tg} \frac{1-4x}{5}}$. 11. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 1})$.

12. $y = 2^{x^2 - \ln x}$. 13. $y = \sqrt[3]{x^4 + 5x}$.

14. $y = \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$. 15. $y = \sqrt[4]{(5x-1)^3}$.

16. $y = \frac{3x}{\sqrt[3]{2+x}}$. 17. $y = \sin^3 2x$.

18. $y = \sqrt{\frac{1+x^2}{1-x^2}}$. 19. $y = e^{1+\ln^2 x}$.

20. $y = \operatorname{tg} \ln \sqrt{x}$. 21. $y = 3^{\cos^2 x}$.

22. $y = xe^{-x}$. 23. $y = \sin \sqrt{1 + x^2}$.

24. $y = \ln \operatorname{ctg} \sqrt[3]{x}$. 25. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}}$.

26. $y = \frac{5}{\sqrt[4]{(x^2+2)^3}}$. 27. $y = \cos \ln^2 x$.

28. $y = (e^{\sin x} - 1)^2$. 29. $y = x \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

30. $y = \frac{1 + \sin 3x}{1 - \sin 3x}$. 31. $y = 2^{\frac{1-x}{1+x}}$.

32. $y = \sqrt[3]{1 + x\sqrt{x+3}}$. 33. $y = \sqrt{1 + \ln^2 x}$.

34. $y = \ln (x + \sqrt{x^2 - 2})$. 35. $y = x \operatorname{tg} 2x$.

36. $y = \cos^4 \frac{5x-1}{2}$.

37. Вычислить $f'(1)$, если $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} + \frac{2x}{x+1}$.

Решение. Находим

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^3+3}} \cdot 2x + \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2} = \frac{x}{\sqrt{x^3+3}} + \frac{2}{(x+1)^2}.$$

При $x = 1$

$$f'(1) = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} = 1.$$

*Ответ:* $f'(1) = 1$.

38. (14.476) Найти вторую производную функции

$$f(x) = x^2 \ln x + \cos 2x.$$

Решение. Имеем

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} - 2\sin 2x = 2x \ln x + x - 2\sin 2x.$$

Затем находим вторую производную

$$f''(x) = (f'(x))' = 2\left(\ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) + 1 - 4\cos 2x = 2\ln x + 3 - 4\cos 2x.$$

39. (14.498) Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \sqrt[3]{t^2}$. Показать, что ее ускорение обратно пропорционально квадрату пройденного расстояния.

Решение. Так как ускорение равно второй производной от функции $s(t)$, то имеем

$$s'(t) = (t^{\frac{2}{3}})' = \frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}; \; a = s''(t) = \left(\frac{2}{3} t^{-\frac{1}{3}}\right)' = \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{3} t^{-\frac{4}{3}}\right) = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\left(t^{\frac{2}{3}}\right)^2} = -\frac{2}{9} \cdot \frac{1}{s^2(t)},$$

что и требовалось доказать.

40. Найти координаты вершины параболы $y = 1 - 3x - 2x^2$.

Решение. Вершина параболы — точка, где функция принимает экстремальное значение, поэтому в этой точке $y' = 0$. Имеем

$$y' = -3 - 4x; \; (-3 - 4x = 0) \rightarrow \left(x = -\frac{3}{4}\right).$$

Далее находим

$$y = 1 - 3\left(-\frac{3}{4}\right) - 2\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{17}{8}.$$

*Ответ:* $\left(-\frac{3}{4}; \frac{17}{8}\right)$.

**41.** Хорда параболы $y = x^2 - 2x + 5$ соединяет точки с абсциссами $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. Написать уравнение касательной, проведённой к параболе и параллельной данной хорде.

**Решение.** Находим ординаты точек хорды $y_1 = x_1^2 - 2x_1 + 5 = 8$, $y_2 = 4$. Угловой коэффициент хорды находим по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 2.$$

По условию касательная параллельна хорде, поэтому $k_1 = k_2 = 2$. Но угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания, следовательно, $y'(x_0) = 2$. Так как $y' = 2x - 2$, то имеем

$$(2x - 2 = 2) \leftrightarrow (x = 2).$$

Таким образом, точка касания имеет абсциссу $x = 2$. Подставляя в уравнение параболы, находим ординату $y = 5$. По формуле (16) запишем уравнение касательной:

$$(y - 5 = 2(x - 2)) \leftrightarrow (y = 2x + 1).$$

*Ответ:* $y = 2x + 1$.

**42.** На линии $y = x^2(x - 2)^2$ найти точки, в которых касательные параллельны оси абсцисс.

**43.** Доказать, что функция $y = x^5 + 5x - 12$ монотонно возрастает на всей числовой прямой.

**44.** Найти точки, в которых касательные к кривой $y = x^3 + x - 2$ параллельны прямой $y = 4x - 1$.

**45.** Составить уравнение касательной, проведённой к линии $y = x^3 + 3x^2 - 5$, параллельно прямой $2x - 6y + 1 = 0$.

**46.** Написать уравнение касательной, проведённой к параболе $y = x^2 - 6x$ через её вершину.

**47.** (14.502) Написать уравнение касательной к графику функции $y = \frac{x^3 + 1}{3}$ в точке его пересечения с осью $Ox$.

48. (14.504) Показать, что касательные, проведенные к графику функции $y = \frac{x-4}{x-2}$ в точках его пересечения с осями координат, параллельны.

49. (14.505) Под каким углом кривая $y = \frac{1}{\sqrt{3}} \sin 3x$ пересекает ось $Ox$ в начале координат?

50. (14.508) В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 7x - 4$ образует с осью $Ox$ угол 45°?

51. (14.511) Найти координаты точки касания, если прямая $y = -\frac{3}{4}x - \frac{3}{32}$ является касательной к линии $y = \frac{1}{2}x^4 - x$.

52. (14.513) Написать уравнения касательных к кривым $y = 2x^2 - 5$ и $y = x^2 - 3x + 5$, проведённых через точку пересечения этих кривых.

53. (14.529) $s(t) = 2t^3 - 3t + 4$. Найти скорость и ускорение в момент $t = 2$.

54. (14.524) $s(t) = \frac{4t+3}{t+4}$. Найти скорость в момент $t = 0$.

55. (14.530) $s(t) = \frac{1}{2}t^4 - 5t^3 + 12t^2 - 1$. В какие моменты времени ускорение движения тела равно нулю?

56. (14.531) $s(t) = 8 - 2t + 24t^2 - 0{,}3t^5$. Найти наибольшую скорость.

57. (14.535) Тело, выпущенное вертикально вверх, движется по закону $h(t) = 4 + 8t - 5t^2$ (м). Найти скорость тела в момент соприкосновения с землей ($g = 10$ м/с$^2$).

С помощью производных можно находить промежутки возрастания и убывания функции, точки экстремума. Покажем это на примерах.

58. Построить график функции $y = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$.

Решение. Находим

$$y' = \frac{(-1+2x)(1+x+x^2) - (1+2x)(1-x+x^2)}{(1+x+x^2)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2}$$

Приравнивая производную к нулю, получим

$$\left(\frac{2(x^2-1)}{(1+x+x^2)^2} = 0\right) \Rightarrow (x^2 - 1 = 0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Рассмотрим поведение функции в интервалах

$$]-\infty;\ -1[,\ ]-1;\ 1[,\ ]1;\ +\infty[.$$

В интервале $]-\infty;\ -1[$ имеем $y' > 0$, следовательно, функция возрастает; в интервале $]-1;\ 1[$ имеем $y' < 0$, следовательно, функция убывает, и в точке $x = -1$ имеет $\max\left(y_{\max} = 3\right)$. В интервале $]1;\ +\infty[$ имеем $y' > 0$, следовательно, функция возрастает, и в точке $x = 1$ имеет $\min\left(y_{\min} = \frac{1}{3}\right)$. Строим график функции (рис.18), учитывая, что

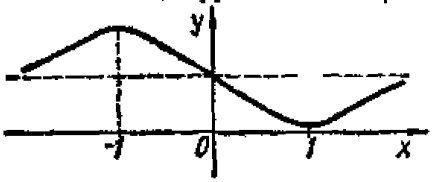


Рис. 18

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1 - x - x^2}{1 + x + x^2} = 1.$$

**59.** Построить график функции $y = \frac{e^x}{x+1}$.

Решение. Находим область определения функции, решая неравенство $(x + 1 \neq 0) \leftrightarrow (x \neq -1)$.

Имеем

$$y' = \frac{e^x(x+1) - e^x}{(x+1)^2} = \frac{e^x \cdot x}{(x+1)^2}.$$

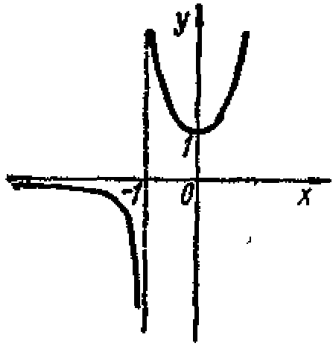


Рис. 19

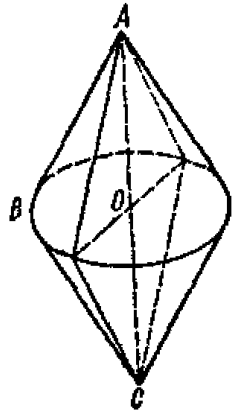


Рис. 20

Так как $\frac{e^x}{(x+1)^2} > 0$ при всех $x$, то знак $y'$ зависит только от $x$: при $x < 0$ имеем $y' < 0$ и функция убывает, при $x > 0$ имеем $y' > 0$ и функция возрастает. В точке $x = -1$ функция имеет бесконечный разрыв, в точке $x = 0$ функция имеет минимум $(y_{\min} = 1)$ (рис. 19).

**60.** Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объём тела, образованного вращением этого треугольника вокруг его основания, был наибольшим?

Решение. Обозначим основание $|AC| = x$, тогда $|AB| = p - \frac{x}{2}$. При вращении $\triangle ABC$ вокруг $[AC]$ получим тело вращения, состоящее из двух конусов (рис. 20). Объём тела вращения

$V = \frac{1}{3}\pi h^2 |AC|$, где $h = \sqrt{\left(p - \frac{x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$ и

$$V = \frac{1}{3}\pi (p - x)\, x.$$

Нужно найти то значение $x$, при котором объём тела будет наибольшим. Для этого вычислим производную $V'(x)$ и приравняем к нулю:

$$V'(x) = \frac{1}{3}\pi p (p - x - x);$$

$$\left(\frac{1}{3}\pi p (p - x - x) = 0\right) \Rightarrow (p - 2x = 0) \leftrightarrow \left(x = \frac{p}{2}\right).$$

Затем вычислим значения $V'\left(\frac{p}{4}\right)$ и $V'(p)$:

$$V'\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{1}{3}\pi p\left(p - \frac{p}{2}\right) > 0;\ V'(p) = \frac{1}{3}\pi p (p - 2p) < 0.$$

Так как производная $V'(x)$ при переходе через точку $x = \frac{p}{2}$ меняет знак с «+» на «—», следовательно, в точке $x = \frac{p}{2}$ функция $V(x)$ достигает максимума.

Таким образом, $|AC| = \frac{p}{2}$, $|AB| = p - \frac{p}{4} = \frac{3p}{4}$.

*Ответ:* $\frac{p}{2}$; $\frac{3p}{4}$; $\frac{3p}{4}$.

**61.** Из круга вырезан сектор с центральным углом $\alpha$. Из сектора свернута коническая поверхность. При каком значении угла $\alpha$ объём полученного конуса будет наибольшим?

**62.** Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объём конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг своей высоты, был наибольшим?

63. Найти высоту цилиндра наибольшего объёма, который можно вписать в шар радиуса $R$.

64. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса $R$.

Построить графики функций:

65. $y = x^4 - x + 2$. 66. $y = \frac{x-1}{x^2+3}$.

67. $y = \frac{x^2+1}{x^2-2}$. 68. $y = \frac{1}{x^2-2x}$.

69. $y = \frac{2x}{x^2-x-1}$. 70. $y = \frac{(x+3)^2}{x}$.

71. $y = 4 - 3x^3 + 2x^2$. 72. $y = x - \frac{4}{x^2}$.

73. $y = \frac{x^3}{x^2-1}$. 74. $y = \frac{x-3}{x+4}$.

75. $y = \frac{x^2}{x^3-4}$. 76. $y = \frac{x^2-2x}{x+1}$.

ГЛАВА XIII

# ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

## § 1. Основные определения и формулы

Установленный в конечном множестве порядок называют *перестановкой* его элементов. Число перестановок из $n$ элементов обозначают через $P_n$. Оно равно произведению последовательных чисел от 1 до $n$ включительно:

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (n-1)\, n = n!. \qquad (1)$$

Множество вместе с заданным порядком расположения его элементов называют *упорядоченным множеством*.

Конечные упорядоченные множества, содержащие $m$ элементов, выбранных из данных $n$ элементов, называют *размещениями*. Число размещений из $n$ по $m$ $(m \leqslant n)$ обозначают $A_n^m$ и находят по формуле

$$A_n^m = n(n-1) \ldots (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \qquad (2)$$

Всякое $m$-элементное подмножество конечного множества, состоящего из $n$ элементов, называется *сочетанием*

из $n$ элементов по $m$. Число сочетаний из $n$ элементов по $m$ обозначают $C_n^m$ и находят по формуле

$$C_n^m = \frac{n\,(n-1)\,\ldots\,(n-m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\,\ldots\,m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \qquad (3)$$

Кроме того, при решении задач используются формулы, выражающие основные свойства сочетаний:

$$C_n^m = C_n^{n-m}, \quad (4) \qquad C_n^n = C_n^0 = 1. \qquad (5)$$

*Формула Ньютона*

$$(x+a)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}a + C_n^2 x^{n-2}a^2 + \cdots + a^n. \qquad (6)$$

Коэффициенты $1,\ C_n^1,\ C_n^2,\ \ldots,\ C_n^{n-1},\ 1$ называются биномиальными коэффициентами. Приведем некоторые свойства, вытекающие из формулы (6).

Пусть $T_{k+1}$ — $(k+1)$-й член разложения бинома Ньютона, тогда

$$T_{k+1} = C_n^k x^{n-k}a^k; \qquad (7)$$

$$1 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots + C_n^{n-1} + 1 = 2^n; \qquad (8)$$

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \cdots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \cdots. \qquad (9)$$

## § 2. Решение задач

**1.** (5.004) Решить уравнение $A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x$.

Решение. Применяя формулы (1)—(4), получим

$$x\,(x-1)\,(x-2) + \frac{x\,(x-1)}{2} = 14x.$$

Так как $x \geqslant 3$, то, сокращая на $x$, приходим к уравнению $(x-1)\,(x-2) + \frac{x-1}{2} = 14$, корни которого $x_1 = 5$, $x_2 = -2{,}5$. Корень $x = -2{,}5$ посторонний.

*Ответ:* $x \in \{5\}$.

**2.** Найти число диагоналей правильного $n$-угольника.

Решение. Число прямых, соединяющих любые две вершины $n$-угольника, равно $C_n^2 = \frac{n\,(n-1)}{2}$. Чтобы получить число диагоналей, нужно из этого количества вычесть число сторон $n$-угольника. Таким образом, имеем

$$C_n^2 - n = \frac{n\,(n-1)}{2} - n = \frac{n\,(n-3)}{2}.$$

*Ответ:* число диагоналей правильного $n$-угольника равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

3. (5.013) Сумма коэффициентов второго и третьего слагаемых разложения $\left(\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ равна 25,5. Написать член, не содержащий $x$.

Решение. Исходя из данных задачи, получим

$$\left(-\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{4}C_n^2=25{,}5\right)\leftrightarrow\left(-\frac{n}{2}+\frac{n(n-1)}{8}=25{,}5\right)\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow(n^2-5n-204=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}n=17,\\n=-12.\end{array}\right.$$

Корень $n=-12$ посторонний, так так $n>0$. Запишем формулу произвольного члена разложения:

$$T_{k+1}=C_{17}^k\left(x^{\frac{2}{5}}\right)^{17-k}\left(-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{6}}\right)^k$$

и возьмём $k$ таким, чтобы этот член не содержал $x$. Для этого решаем уравнение

$$\left((17-k)\frac{2}{5}-\frac{k}{6}=0\right)\Rightarrow(k=12).$$

Таким образом, $T_{13}$ не содержит $x$:

$$T_{13}=C_{17}^{12}\left(-\frac{1}{2}\right)^{12}=C_{17}^5\left(\frac{1}{2}\right)^{12}=\frac{1547}{1024}.$$

*Ответ:* $\frac{1547}{1024}$.

4. (5.010) При каких значениях $x$ четвёртый член разложения $(5+2x)^{16}$ больше двух соседних с ним членов?

Решение. Выпишем выражения для $T_3$, $T_4$, $T_5$:

$$T_3=C_{16}^2 5^{14}(2x)^2,\quad T_4=C_{16}^3 5^{13}(2x)^3,\quad T_5=C_{16}^4 5^{12}(2x)^4.$$

Так как $T_4>T_3$; $T_4>T_5$, то получаем систему неравенств

$$\left\{\begin{array}{l}C_{16}^3 5^{13}(2x)^3>C_{16}^2 5^{14}(2x)^2,\\C_{16}^3 5^{13}(2x)^3>C_{16}^4 5^{12}(2x)^4\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\frac{14}{3}\cdot\frac{2x}{5}>1,\\5>\frac{13x}{2}\end{array}\right.\leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}28x>15,\\13x<10\end{array}\right.\Rightarrow\left(\frac{15}{28}<x<\frac{10}{13}\right).$$

*Ответ:* $x\in\left]\frac{15}{28};\frac{10}{13}\right[$.

5. (5.037) Сумма третьего от начала и третьего от конца биномиальных коэффициентов разложения $\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[3]{4}\right)^n$ равна 9900. Сколько рациональных членов содержится в этом разложении?

Решение. Так как $C_n^k = C_n^{n-k}$, то биномиальные коэффициенты третьего от начала и третьего от конца членов разложения равны $C_n^2$. Тогда

$$(2C_n^2 = 9900) \Rightarrow (n(n-1) = 9900) \Rightarrow (n = 100).$$

Запишем формулу для произвольного члена разложения:

$$T_{k+1} = C_{100}^k \left(\sqrt[4]{3}\right)^{100-k} \left(\sqrt[3]{4}\right)^k = C_{100}^k 3^{\frac{100-k}{4}} \cdot 4^{\frac{k}{3}}.$$

Рациональными члены разложения будут в том случае, если $\frac{k}{3}$ и $\frac{100-k}{4}$ будут целыми числами, т. е. $k = 3m$, $100 - k = 4p$, где $m$ и $p$ — целые числа. Решим полученную систему

$$(100 - 3m = 4p) \leftrightarrow (100 - 4p = 3m) \Rightarrow (4(25 - p) = 3m).$$

Так как $p$ и $m$ — целые числа, то $25 - p$ должно делиться на 3. Это выполняется при $p = 1, 4, 7, \ldots, 25$. Эти числа образуют арифметическую прогрессию, где $a_1 = 1$, $d = 3$. Число членов этой прогрессии

$$n = \frac{25-1}{3} + 1 = 9.$$

Таким образом, число рациональных членов разложения равно 9.

*Ответ:* 9.

6. (5.040) Сколько четырёхзначных чисел, делящихся на 5, можно составить из цифр 0, 1, 2, 5, 7, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

Решение. Четырёхзначные числа, делящиеся на 5, должны оканчиваться цифрой 5 или 0. Зафиксируем цифру 5, а из оставшихся четырёх цифр составляем всевозможные размещения по три цифры. Количество их $A_4^3$, но из этого количества нужно вычесть те размещения, у которых на первом месте стоит 0 (их $A_3^2$). Итак, чисел, оканчивающихся на 5, всего

$$A_4^3 - A_3^2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 18.$$

Количество чисел, у которых последняя цифра 0, равно $A_4^3 = 24$. Таким образом, количество четырёхзначных чисел, делящихся на 5, равно $24 + 18 = 42$.

*Ответ:* 42.

Решить уравнения:

7. $C_x^5 = C_x^7$. 8. $A_7^x = xA_7^{x-1}$.

9. $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$.

10. Найти $x$, если пятый член разложения $(\sqrt[4]{x} + x^{-1})^6$ равен $\frac{5}{9}$.

11. Коэффициенты пятого, шестого и седьмого членов разложения $(1 + x)^n$ образуют арифметическую прогрессию. Найти $n$.

12. При каком $x$ третий член разложения $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{4-\sqrt[x]{4}}\right)^6$ равен 240?

13. Какой член разложения бинома $\left(z\sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt[3]{z}}\right)^n$ содержит $z^5$, если сумма биномиальных коэффициентов равна 128?

14. Найти $x$, $y$, $z$, если второй, третий и четвёртый члены разложения $(x + y)^z$ равны соответственно 240, 720, 1080.

15. Найти наибольший член разложения $(1 + \sqrt{2})^{50}$.

16. При каком значении $x$ коэффициент четвёртого члена разложения бинома $(a + b)^{\lg x - 2}$ равен показателю бинома?

17. Найти пятый член разложения бинома $(\sqrt[8]{2} - \sqrt{2^{-1}})^n$, если последний член этого разложения равен $(3\sqrt[8]{9})^{-\log_8 8}$.

18. (5.032) Разность между третьими биномиальными коэффициентами разложений $(a + b)^{n+1}$ и $(a + b)^n$ равна 225. Найти число рациональных членов разложения $(\sqrt[5]{x} + \sqrt[9]{y})^n$.

19. (5.052) Из группы в 15 человек должны быть выделены бригадир и 4 члена бригады. Сколькими способами это можно сделать?

20. (5.063) При каких значениях $x$ наибольшим членом разложения $(5 + 3x)^{10}$ является четвёртый?

21. (5.047) Сколько четырёхзначных чисел, делящихся на 3, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, если каждое число не должно содержать одинаковых цифр?

22. (5.056) Буквы азбуки Морзе состоят из символов (точек и тире). Сколько букв можно изобразить, если потребовать, чтобы каждая буква содержала не более пяти символов?

ГЛАВА XIV

# ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

## § 1. Основные формулы

Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, *если*

$$F'(x) = f(x). \tag{1}$$

Выражение $F(x) + C$, где $C$ — произвольная постоянная, называют *неопределенным интегралом функции* $f(x)$ и пишут

$$F(x) + C = \int f(x)\,dx. \tag{2}$$

Нахождение множества всех первообразных функции $f(x)$ называется *интегрированием* этой функции.

### Основные формулы интегрирования (табличные интегралы)

$$\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad (\alpha \neq -1), \tag{3}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \tag{4}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C, \tag{5}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C, \tag{6}$$

$$\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C, \tag{7}$$

$$\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{ctg} x + C, \tag{8}$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \tag{9}$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C, \tag{10}$$

$$\int f(kx+b)\,dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C, \tag{11}$$

$$\int kf(x)\,dx = k\,F(x) + C. \tag{12}$$

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$ и прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ (рис. 21), находится по формуле

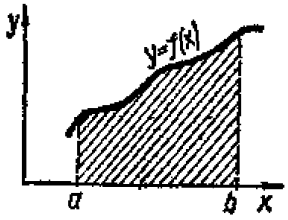


Рис. 21

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{13}$$

Если фигура ограничена сверху кривой $y = f_1(x)$, а снизу кривой $y = f_2(x)$ для всех $x \in [a; b]$, то площадь её вычисляем по формуле

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx. \tag{14}$$

## § 2. Решение задач

**1.** Найти первообразную для функции $(ax+b)^\alpha$; $(\alpha \neq -1)$.

Решение. Применяя формулы (2), (11), имеем

$$\int (ax+b)^\alpha\,dx = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C.$$

**2.** Найти первообразную для функции $\frac{1}{ax+b}$.

Решение. $\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$

**3.** Найти первообразную для функции $\sqrt[3]{3-4x}$.

Решение. $\int \sqrt[3]{3-4x}\,dx = -\frac{1}{4}\frac{(3-4x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = -\frac{3}{16}\times$

$\times (3-4x)^{\frac{4}{3}} + C.$

4. Проинтегрировать функцию $\left(\frac{1-z}{z}\right)^2$.

Решение. Представим $\left(\frac{1-z}{z}\right)^2$ в виде суммы $\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1$ и, использовав формулы (2) — (4), получим

$$\int \frac{(1-z)^2\,dz}{z^2}=\int\left(\frac{1}{z^2}-\frac{2}{z}+1\right)dz=-\frac{1}{z}-2\ln|z|+z+C.$$

5. Найти первообразную для функции $\operatorname{tg}^2 x$.

Решение. Представим $\operatorname{tg}^2 x$ в виде разности $\sec^2 x-1$, тогда получим

$$\int \operatorname{tg}^2 x\,dx=\int(\sec^2 x-1)\,dx=\operatorname{tg} x-x+C.$$

6. Проинтегрировать функцию $\sin(2x-3)$.

Решение. $\int \sin(2x-3)\,dx=-\frac{1}{2}\cos(2x-3)+C.$

7. Найти первообразную для функции $2^{3x-2}$.

Решение. $\int 2^{3x-2}\,dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{2^{3x-2}}{\ln 2}+C.$

8. Проинтегрировать функцию $e^{1-4x}$.

Решение. $\int e^{1-4x}\,dx=-\frac{1}{4}\cdot e^{1-4x}+C.$

Найти первообразные для функций:

9. $5x^3-1$.

10. $\frac{5}{\sqrt{2x+7}}$.

11. $7\sin\frac{x}{3}+\frac{2}{\cos^2 4x}$.

12. $(1+2x)^9$.

13. $\frac{1}{\sqrt{5+0{,}5x}}$.

14. $(x-2)\sqrt{3x-1}$.

15. $\frac{x}{\sqrt{2-0{,}5x}}$.

16. $\sin^4 x$.

17. $\cos 2x\cos 7x$.

18. $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

19. $\frac{x}{1-x^2}$.

20. $\frac{x}{3+2x^2}$.

21. $\frac{x}{\sqrt[4]{1-x}}$.

22. $\frac{x}{\sqrt{3+2x^2}}$.

23. $x\sqrt{1-x^2}$.

24. $x\sqrt[3]{1-x}$.

25. $\frac{1}{\cos^2 3x}$.

26. $3\cos\frac{x}{2}$.

27. $\frac{3}{\sin^2 4x}$.

28. $\frac{2}{\cos^2(1-2x)}$.

29. $e^{3x+2}$. 30. $\frac{1}{1-4x}$.

31. Найти первообразную для функции $f(x) = \sin 2x$, которая проходит через точку $M_0$ (0; 1).

Решение. $\int \sin 2x\,dx = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Постоянную $C$ подбираем таким образом, чтобы график кривой $y = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$ проходил через точку $M_0$. Имеем при $x = 0$

$$\left(1 = -\frac{1}{2}\cos 0 + C\right) \leftrightarrow \left(C = \frac{3}{2}\right).$$

*Ответ:* $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Для данной функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0)$:

32. $f(x) = (1-3x)^3$; $M_0\left(0; -\frac{1}{12}\right)$.

33. $f(x) = \sec^2 5x$; $M_0\left(\frac{\pi}{4}; 0\right)$.

34. $f(x) = x^3$; $M_0\left(1; \frac{5}{4}\right)$.

35. $f(x) = 4x^2 - 3x^2$; $M_0(0; 1)$.

36. $f(x) = \sin 4x$; $M_0(0; 0)$.

37. $f(x) = \sqrt[3]{2x+3}$; $M_0(2{,}5; 3)$.

38. Вычислить $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$.

Решение. Применяя формулы (3), (11), имеем

$$\int \frac{dx}{(11+5x)^3} = \int (11+5x)^{-3}\,dx = \frac{(11+5x)^{-2}}{-2} \cdot \frac{1}{5}.$$

Затем, использовав формулу (13), получим

$$\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3} = -\frac{1}{10}(11+5x)^{-2}\Big|_{-2}^{-1} = -\frac{(11-5)^{-2} - 1}{10} = \frac{7}{72}.$$

*Ответ:* $\frac{7}{72}$.

**39.** Вычислить $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx$.

Решение. Выполним преобразования

$$\int \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = \int \frac{1-\cos\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)}{2}dx = \\ = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Далее получаем

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)dx = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{6}\sin\left(6x+\frac{\pi}{3}\right)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{6}\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{6}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

*Ответ:* $\frac{\pi}{6}$.

**40.** Вычислить $\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{e-2}{3}} \frac{dx}{2+3x}$.

Решение. Имеем $\int \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x|$, тогда

$$\int\limits_{-\frac{1}{3}}^{\frac{e-2}{3}} \frac{dx}{2+3x} = \frac{1}{3}\ln|2+3x|\Big|_{-\frac{1}{3}}^{\frac{e-2}{3}} = \frac{1}{3}(\ln e - \ln 1) = \frac{1}{3}.$$

*Ответ:* $\frac{1}{3}$.

Вычислить интегралы:

**41.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\frac{x}{2}dx$.

**42.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 4x\,dx$.

43. $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$.

44. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+\sin 2t)^3\,dt$.

45. $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2\frac{x}{3}}$.

46. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)dx$.

47. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\frac{2x}{3}\,dx$.

48. $\int_0^1 (1-2x)^4\,dx$.

49. $\int_0^{4,5} \sqrt[3]{2x-1}\,dx$.

50. $\int_0^4 \sqrt{1+2x}\,dx$.

51. $\int_1^2 \frac{dx}{3x-2}$.

52. $\int_1^3 \frac{x\,dx}{x^2+3}$.

53. $\int_0^2 \frac{x\,dx}{\sqrt{3x+2}}$.

54. $\int_0^1 \frac{3x^2+x-2}{3x+1}\,dx$.

55. $\int_0^{\pi} \cos^4 x\,dx$.

56. $\int_{-1}^{14} \frac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$.

57. $\int_{-1}^{1} \cos \pi x\,dx$.

58. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, уравнения которых $y^2 = 2x+1$ и $y = x-1$.

Р е ш е н и е. Находим точки пересечения кривых (рис. 22), решая систему

$$\begin{cases} y = x-1, \\ y^2 = 2x+1. \end{cases}$$

Имеем

$$((x-1)^2 = 2x+1) \Rightarrow (x^2-4x=0) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=4. \end{array}\right.$$

Искомая площадь, очевидно, разбивается на две части:

$$S = \int_{-0,5}^{0} 2\sqrt{2x+1}\,dx + \int_0^4 (\sqrt{2x+1} - (x-1))\,dx.$$

Далее получаем

$$\int \sqrt{2x+1}\,dx = \frac{2}{3}\left(2x+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}};$$

$$\int (x-1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x,$$

$$S = \frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-0,5}^{0} + \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{0}^{4} - \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Big|_{0}^{4} =$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(9^{\frac{3}{2}} - 1) - (8-4) = \frac{16}{3}.$$

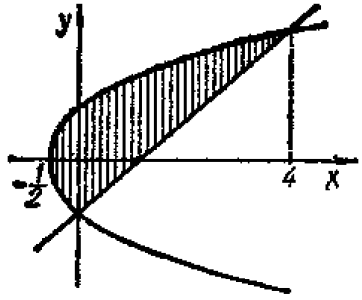



Рис. 22

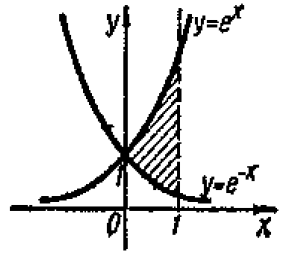



Рис. 23

**59.** Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^x, \quad y = e^{-x}, \quad x = 1.$$

Решение. Искомую площадь (рис. 23) находим по формуле

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx.$$

Имеем $\int e^x\,dx = e^x$, $\int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$, тогда

$$S = \int_0^1 (e^x - e^{-x})\,dx = (e^x + e^{-x})\Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.$$

Вычислить площади фигур, ограниченных линиями

**60.** $y = x^2$; $y = 2 - x$. **61.** $y = x^3$; $y = x$.

**62.** $y = x^4$; $y = \sqrt{x}$. **63.** $y = \frac{2}{x}$; $y = 3 - x$.

**64.** $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 1$; $x = 8$; $y = 0$.

**65.** $y = \cos 2x$; $y = 0$; $x = 0$; $x = \frac{\pi}{2}$.

ГЛАВА XV

# РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

## § 1. Комплексные числа

### Основные определения и формулы

*Комплексными числами* называются числа вида $a + bi$, где $a$ и $b$ — действительные числа, а число $i$, определяемое равенством $i^2 = -1$, называется *мнимой единицей*. Пусть $z_1 = a_1 + b_1 i$, $z_2 = a_2 + b_2 i$ — два комплексных числа, тогда запишем основные соотношения:

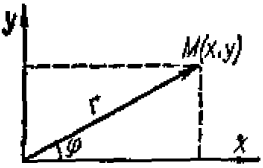


Рис. 24

а) $z_1 = z_2$ тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$;

б) $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$;

в) $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)\, i$.

Выражение вида $z = a + bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа $z$, причём $a$ называется *действительной частью* ($a = \operatorname{Re} z$), $b$ — *мнимой* ($b = \operatorname{Im} z$).

Между множеством комплексных чисел $z = x + yi$ и точками плоскости $xOy$ (рис. 24) можно установить взаимно-однозначное соответствие. При этом комплексному числу $z = x + yi$ соответствует точка $M(x;y)$, действительные числа изображаются точками оси $Ox$, мнимые числа ($z = bi$) — точками оси $Oy$. Число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* $z$ ($r = |z|$), а угол $\varphi$, образованный вектором $\overrightarrow{OM}$ с положительным направлением оси $Ox$, — *аргументом* числа $z$:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \varphi_0 + 2k\pi, \quad -\pi < \varphi_0 \leqslant \pi,$$

$\varphi_0$ — главное значение аргумента.

Имеют место соотношения:

$$\cos\varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad x = r\cos\varphi;$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad y = r\sin\varphi.$$

*Геометрический смысл* $|z|$ — расстояние от точки $M(x;y)$ до точки $O(0;0)$. Далее имеем

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Эта форма записи комплексного числа $z$ называется *тригонометрической формой*.

Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* к числу $z = x + iy$. Очевидно, $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = r^2$.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$, тогда

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При возведении комплексного числа в $n$-ю степень ($n \in N$) применяется *формула Муавра*

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

При извлечении корня $n$-й степени из комплексного числа $z$ получаем $n$ различных корней по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,2,\ldots,n-1.$$

Приведем примеры.

**1.** Вычислить $i^n$, где $n$ — произвольное целое число.

Решение. Используя тригонометрическую форму представления числа, получаем $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$. По формуле Муавра $i^n = \cos\frac{n\pi}{2} + i\sin\frac{n\pi}{2}$, или

$$i^n = \begin{cases} 1 \text{ при } n = 4k, \\ i \text{ при } n = 4k+1, \\ -1 \text{ при } n = 4k+2, \\ -i \text{ при } n = 4k+3, \end{cases}$$

где $k \in N$.

**2.** Найти множество точек, изображающих комплексные числа, удовлетворяющие условиям:

а) $|z| = a$; б) $|z| \leqslant a$; в) $|z| > a$;

г) $2 < |z| \leqslant 4$; д) $|z - z_0| = a$.

Решение. Исходя из геометрического смысла $|z|$, получаем:

а) все точки окружности радиуса $a$ с центром в точке $O(0;0)$ при $a \geqslant 0$; $\varnothing$ при $a < 0$;

б) все точки круга радиуса $a$ с центром в точке $O(0;0)$ при $a \geqslant 0$; $\varnothing$ при $a < 0$;

в) все точки плоскости при $a < 0$; точки плоскости при $a \geqslant 0$, расположенные вне круга с центром в точке $O(0;0)$ и радиусом $a$.

г) все точки кругового кольца (с радиусами 2 и 4);

д) все точки окружности с центром в точке $z_0(x_0; y_0)$ и радиусом $a$.

**3.** Найти $(1 + i\sqrt{3})^6$.

Решение. Запишем число $1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме

$$1 + i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Применяя формулу Муавра, получим

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = \left(2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^6 = 64(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 64.$$

**4.** Найти $\sqrt[3]{i}$.

Решение. Запишем число $i$ в тригонометрической форме

$$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}.$$

Применяя формулу извлечения корней из комплексных чисел, находим:

$$\sqrt[3]{i} = z_k, \quad k = 0,1,2;$$

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6},$$

$$z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6},$$

$$z_2 = \cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i.$$

Вычислить:

**5.** $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{24}$. **6.** $(1+i)^4$. **7.** $(1-i)^4$.

**8.** $\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^8$. **9.** $\sqrt{-i}$. **10.** $\sqrt[4]{-4}$. **11.** $\sqrt{1-i}$.

Найти множество точек, изображающих комплексные числа, которые удовлетворяют условиям:

12. $\arg z = \frac{\pi}{4}$. 13. $\arg z = \pi$.

14 $\begin{cases} |\arg z| \leqslant \frac{\pi}{6}, \\ 1 \leqslant |z| \leqslant 2. \end{cases}$ 15. $\frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{2\pi}{3}$.

16. $|\arg z| \leqslant \frac{\pi}{2}$.

Найти комплексные числа, удовлетворяющие уравнениям:

17. $z^2 + |z| = 0$. 18. $\begin{cases} \left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3}, \\ \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1. \end{cases}$ 19. $|z| = 1$.

20. Доказать, что если $2\cos\alpha = z + \frac{1}{z}$, то $2\cos n\alpha = z^n + z^{-n}$. 21. Доказать, что $\arg\frac{x}{y} = \arg x - \arg y$.

## § 2. Задачи на составление уравнений

Решение задач на составление уравнений можно разбить на несколько этапов: выбор неизвестных величин, их обозначение; запись указанных в задаче соотношений между известными и неизвестными величинами в виде уравнений, неравенств или смешанных систем (уравнений и неравенств); нахождение области определения неизвестных и данных величин; решение составленных уравнений или систем уравнений с учётом области определения (при этом учитываются естественные физические ограничения, которые обычно не указываются в тексте задачи).

Приведём несколько задач на составление уравнений.

22. По окружности в противоположных направлениях движутся два тела: первое равномерно с линейной скоростью $v$, а второе равноускоренно с линейным ускорением $a$. В начальный момент времени оба тела находились в одной точке $A$ и скорость второго тела была равна нулю. Через какое время произойдёт первая встреча этих тел, если вторая встреча будет снова в точке $A$?

Решение. Обозначим через $t_1$ время до первой встречи, $t_2$ — время до второй встречи, $R$ — радиус окружности. Пути, пройденные телами, соответственно равны $vt_1$ и $\frac{at_1^2}{2}$.

Так как сумма длин этих путей равна длине окружности, то получим уравнение

$$vt_1 + \frac{at_1^2}{2} = 2\pi R. \qquad (1)$$

За время $t_2$ каждое тело пройдёт путь, равный $2\pi R$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} vt_2 = 2\pi R, \\ \frac{at_2^2}{2} = 2\pi R. \end{cases} \qquad (2)$$

Решая эту систему уравнений с учётом уравнения (1) получим

$$at_1^2 + 2vt_1 - \frac{4}{a}v^2 = 0,$$

откуда $t = \frac{v}{a}(\sqrt{5} - 1)$ (корень $t = -\frac{v}{a}(\sqrt{5} + 1)$ не удовлетворяет условию).

23. По окружности радиуса $R$ равномерно и в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный круг на $t$ с быстрее второй. Время между двумя последовательными встречами точек равно $z$. Определить скорости этих точек.

Решение. Пусть $v_1$ и $v_2$ — скорости точек ($v_1 > v_2$). Использовав условие задачи, запишем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{2\pi R}{v_2} - \frac{2\pi R}{v_1} = t, \\ zv_1 - zv_2 = 2\pi R. \end{cases}$$

Решая эту систему методом подстановки, получим

$$v_1^2 - \frac{2\pi R v_1}{z} - \frac{(2\pi R)^2}{zt} = 0,$$

откуда

$$v_1 = \frac{\pi R}{z}\left(\sqrt{1 + \frac{4z}{t}} + 1\right),$$

Подставляя найденное значения $v_1$ во второе уравнение системы, находим

$$v_2 = \frac{\pi R}{z}\left(\sqrt{1 + \frac{4z}{t}} - 1\right).$$

24. В двух одинаковых сосудах, объемом по 30 л каждый, содержится 30 л спирта. Первый сосуд доливают доверху водой и полученной смесью дополняют

второй сосуд, затем из второго сосуда отливают в первый 12 л новой смеси. Сколько спирта было первоначально в каждом сосуде, если во втором сосуде оказалось на 2 л спирта меньше, чем в первом?

Решение. Обозначим через $x$ количество спирта в первом сосуде, тогда количество спирта во втором равно $30-x$. После доливания первого сосуда водой концентрация спирта была равна $\frac{x}{30}$. После того как второй сосуд дополнили смесью из первого сосуда, количество спирта во втором сосуде равнялось $30-x+x\cdot\frac{x}{30}$, а концентрация спирта во втором сосуде была равна $1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2$. После отливания 12 л новой смеси в первый сосуд количество спирта в нём стало равным $\frac{x}{30}(30-x)+12\left(1-\right.$ $\left.-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$, а во втором $18\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)$. Тогда имеем

$$\left(18\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)+2=\frac{x}{30}(30-x)+12\left(1-\frac{x}{30}+\left(\frac{x}{30}\right)^2\right)\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x^2-30x+200=0)\Rightarrow (x=20,\ x=10).$$

Итак, в первом сосуде было 20 л, а во втором 10 л (или наоборот).

25. Найти двузначное число, частное от деления которого на произведение его цифр равно $\frac{8}{3}$, а разность между искомым числом и числом с переставленными цифрами равна 18.

Решение. Обозначим через $x$ цифру десятков, $y$ — цифру единиц, тогда искомое число можно записать в виде $10x+y$, а число с переставленными цифрами в виде $10y+x$. Тогда можем записать такую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{10x+y}{xy}=\dfrac{8}{3},\\ 10x+y=18+10y+x.\end{cases}$$

Решая систему и учитывая, что $x$ и $y$ целые числа, находим $x=6$, $y=4$.

*Ответ*: 64.

26. Пароход плывет из Киева в Днепропетровск двое суток, обратно — трое суток. Определить, сколько суток будет плыть плот из Киева в Днепропетровск.

Решение. Обозначим через $a$ расстояние между Киевом и Днепропетровском, тогда скорость парохода по течению равна $\frac{a}{2}$ км в сутки, а против течения $\frac{a}{3}$ км в сутки. Очевидно, разность между этими величинами равна двойной скорости течения. Отсюда получаем $\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\frac{a}{6}$ и, следовательно, за сутки плот проплывает расстояние $\frac{a}{12}$, а все расстояние он проплывет за 12 суток.

27. Бассейн наполняется двумя трубами за 6 ч. Одна первая труба заполняет его на 5 ч скорее, чем одна вторая. Сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждой трубой в отдельности?

Решение. Если первая труба наполняет бассейн за $x$ часов, то вторая за $(x+5)$ часов. За один час первая труба наполняет $\frac{1}{x}$ часть бассейна, а вторая $\frac{1}{x+5}$ часть бассейна, а две трубы вместе — $\frac{1}{6}$ часть. Отсюда получаем

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+5}=\frac{1}{6}\right)\Rightarrow(x^2-7x-30=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=10\\x=-3\end{array}\right.$$

*Ответ*: 10 ч, 15 ч

28. Знаменатель дроби на 2 единицы больше числителя. Если числитель дроби, обратной данной, уменьшить на единицу, то полученная дробь будет больше данной на $\frac{11}{15}$. Найти первоначальную дробь.

Решение. Обозначим числитель первоначальной дроби через $x$, $(x\in N)$, тогда знаменатель равен $x+2$. Дробь, обратная данной, имеет вид $\frac{x+2}{x}$. Далее решаем уравнение

$$\left(\frac{x+1}{x}-\frac{x}{x+2}=\frac{11}{15}\right)\Rightarrow(11x^2-23x-30=0)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3,\\x=-\frac{10}{11}.\end{array}\right.$$

Значение $x=-\frac{10}{11}$ не удовлетворяет условию задачи.

*Ответ*: $\frac{3}{5}$.

29. По окружности движутся два тела: первое пробегает окружность на 5 с быстрее второго. Если они движутся в одном направлении, то сходятся через каждые 100 с. Какую часть окружности (в градусах) пробегает каждое тело в 1 с?

**30.** Два тела, двигаясь по окружности в одном и том же направлении, сходятся через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин и расстояние (по окружности) между сближающимися телами уменьшалось бы от 40 до 26 м за 24 с. Сколько метров в минуту проходит каждое тело и какова длина окружности?

**31.** Моторная лодка спустилась по течению на 28 км и сразу же вернулась назад, на путь туда и обратно ей потребовалось 7 ч. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что скорость течения 3 км/ч.

**32.** Два рабочих, работая вместе, выполняют некоторую работу за 8 ч. Первый из них, работая отдельно, может выполнить всю работу на 12 ч скорее, чем второй. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, может выполнить работу?

**33.** Двум рабочим было поручено изготовить партию одинаковых деталей. После того как первый проработал 7 ч, а второй 4 ч, оказалось, что они выполнили $\frac{5}{9}$ всей работы. Проработав совместно еще 4 ч, они установили, что им остаётся выполнить $\frac{1}{18}$ всей работы. За сколько часов каждый из них, работая отдельно, мог бы выполнить всю работу?

**34.** Двум машинисткам было поручено выполнить некоторую работу. Вторая из них приступила к работе на 1 ч позже первой. Через 3 ч после того, как первая начала работу, им осталось выполнить еще $\frac{9}{20}$ всей работы. По окончании работы оказалось, что каждая машинистка выполнила половину всей работы. За сколько часов каждая из них в отдельности могла бы выполнить всю работу?

**35.** Несколько человек взялись вырыть канаву и могли бы окончить работу за 6 ч, если бы начали её одновременно, но они приступили к работе один за другим через одинаковые промежутки времени. Через такой же промежуток времени после выхода на работу последнего участника канава была вырыта, причем каждый из участников оставался на работе до конца. Сколько времени они рыли канаву, если приступивший к работе первым проработал в 5 раз больше времени, чем приступивший последним?

**36.** Из бака, наполненного чистым спиртом, вылили часть спирта и долили тем же количеством воды; потом из бака вылили столько же литров смеси; тогда в баке осталось 49 л чистого спирта. Вместимость бака 64 л. Сколько спирта вылили в первый раз и сколько во второй?

**37.** Сосуд в 20 л наполнен спиртом. Из него вылили некоторое количество спирта в другой, равный ему, и, дополнив остальную часть второго сосуда водой, дополнили этой смесью первый сосуд. Затем из первого отлили $6\frac{2}{3}$ л во второй, после чего в обоих сосудах стало одинаковое количество спирта. Сколько отлито первоначально спирта из первого сосуда во второй?

**38.** Одна бочка содержит смесь спирта с водой в отношении 2:3, а другая — в отношении 3:7. По скольку вёдер нужно взять из каждой бочки, чтобы получить 12 вёдер смеси, в которой спирт и вода были бы в отношении 3:5?

**39.** Из пункта $A$ по направлению в $B$ вышел пешеход. Через $a$ часов из $B$ навстречу пешеходу выехал велосипедист; через $b$ часов после своего выезда он встретил пешехода. Сколько времени надо велосипедисту и пешеходу, чтобы пройти весь путь между $A$ и $B$, если велосипедисту на это требуется на $c$ часов меньше, чем пешеходу?

**40.** Два велосипедиста, выехав одновременно из пункта $A$, едут с разными, но постоянными скоростями в пункт $B$ и, достигнув его, сейчас же поворачивают обратно. Первый велосипедист, выйдя вперёд, встречает второго на обратном пути на расстоянии $a$ от $B$, затем, достигнув $A$ и снова повернув обратно к $B$, он встречает второго велосипедиста, пройдя $k$-ю часть расстояния от $A$ до $B$. Найти расстояние от $A$ до $B$.

**41.** Рабочие $A$ и $B$ работали одинаковое количество дней. Если бы $A$ работал на один день меньше, а $B$ на 7 дней меньше, то $A$ заработал бы 72 руб., а $B$ — 64 руб. 80 коп. Если бы наоборот, $A$ работал на 7 дней меньше, а $B$ на один день меньше, то $B$ заработал бы на 32 руб. 40 коп. больше $A$. Сколько заработал каждый в действительности?

**42.** Бассейн наполняется водой из двух кранов. Сначала первый кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для наполнения бассейна только через один второй кран. Затем наоборот, второй кран был открыт одну треть того времени, которое требуется для

наполнения бассейна через один первый кран. После этого оказалось наполненным $\frac{13}{18}$ бассейна. Вычислить, сколько времени необходимо для наполнения бассейна каждым краном в отдельности, если оба крана, открытых вместе, наполняют бассейн за 3 ч 36 мин.

**42.** Число единиц двузначного числа на 3 меньше числа десятков. Произведение этого числа на сумму его цифр равно 364. Найти это число.

**44.** Два вкладчика положили в сберкассу одинаковые суммы. Первый из них взял вклад по истечении $m$ месяцев и получил $p$ руб., а второй, взяв вклад по истечении $n$ месяцев, получил $q$ руб. Сколько каждый из них положил в сберкассу и сколько процентов выплачивает сберкасса?

**45.** Два самолёта вылетают одновременно из пункта $A$ и $B$ навстречу друг другу и встречаются на расстоянии $a$ от середины $AB$. Если первый самолёт вылетит на $b$ часов позже второго, то они встретятся на середине $AB$. Если же, наоборот, второй самолёт вылетит на $b$ часов позже первого, то они встретятся на четверти пути от $B$. Найти расстояние $AB$ и скорости самолетов.

**46.** От пристани $A$ одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в $A$ через 14 ч. Найти скорость катера в стоячей воде и скорость течения, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от $A$.

**47.** Два тела начали двигаться одновременно в одном и том же направлении из двух мест, расстояние между которыми равно 20 м. Одно из них, находящееся позади, движется равноускоренно и проходит в первую секунду 25 м, а в следующую секунду на $\frac{1}{3}$ м больше; другое тело, двигаясь равнозамедленно, проходит в первую секунду 30 м, а в следующую на $\frac{1}{2}$ м меньше. Через сколько секунд первое тело нагонит второе?

**48.** Найти четырёхзначное число по следующим условиям: сумма квадратов крайних цифр равна 13; сумма квадратов средних цифр равна 85; если же из искомого числа вычесть 1089, то получится число, записываемое теми же цифрами, что искомое, но в обратном порядке.

**40.** Рассматривается дробь (отношение двух целых чисел), знаменатель которой меньше квадрата числителя на единицу. Если к числителю и знаменателю прибавить по 2, то значение дроби будет больше, чем $\frac{1}{3}$; если же от числителя и знаменателя отнять по 3, то дробь останется положительной, но будет меньше $\frac{1}{10}$. Найти эту дробь.

ГЛАВА XVI

# ПЛАНИМЕТРИЯ

## § 1. Основные формулы и определения

1. Приведём основные соотношения между элементами треугольника со сторонами $a$, $b$, $c$ и соответственно противолежащими углами $A$, $B$, $C$:

а) $c < a + b$ ($c$ — наибольшая из сторон);

б) $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.

Центр вписанной в треугольник окружности лежит в точке пересечения биссектрис. Центр описанной вокруг треугольника окружности лежит в точке пересечения трёх серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам этого треугольника. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении 2 : 1, считая от вершины треугольника.

в) **Теорема синусов**

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R, \qquad (1)$$

где $R$ — радиус описанной окружности;

г) **теорема косинусов**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}. \qquad (2)$$

Обозначим $r$ — радиус вписанной окружности; $h_a$ — высота, опущенная на сторону $a$; $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр; $S$ — площадь треугольника.

**Формулы для вычисления площади треугольника:**

$$S = \frac{1}{2} ah_a, \quad S = \frac{1}{2} ab \sin \widehat{C}; \tag{3}$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \tag{4}$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \quad S = r \cdot p \tag{5}$$

(формулы (5) чаще всего применяют для вычисления $r$ и $R$).

В *правильном* треугольнике ($a = b = c$)

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \; r = \frac{a\sqrt{3}}{6}; \; R = 2r = \frac{a\sqrt{3}}{3}; \; S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}. \tag{6}$$

В *прямоугольном* треугольнике ($c$ — гипотенуза, $a$, $b$ — катеты)

$$a^2 + b^2 = c^2; \; S = \frac{1}{2} ab; \; R = \frac{c}{2}.$$

*Свойства перпендикуляра*, опущенного из вершины прямого угла $A$ на гипотенузу $BC$ (рис. 25):

$$|AK|^2 = |BK| \cdot |KC|; \; |AB|^2 = |BK| \cdot |BC|; \; |AC|^2 = |KC| \cdot |BC|. \tag{7}$$

*Средняя линия* треугольника (отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника) параллельна третьей стороне и длина ее равна половине длины третьей стороны.

*Биссектриса внутреннего угла* треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам.

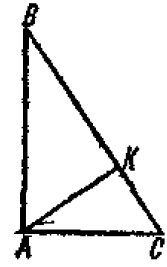


Рис. 25

2. Рассмотрим основные соотношения для четырехугольников, обозначая $a$, $b$ — смежные стороны, $\alpha$ — угол между ними, $d_1$, $d_2$ — диагонали, $\beta$ — угол между диагоналями, $h_a$ — высота, опущенная на сторону $a$.

В произвольном *выпуклом четырехугольнике*

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta. \tag{8}$$

В *квадрате* $a = b$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $d_1 = d_2 = a\sqrt{2}$,

$$S = a^2, \; S = \frac{1}{2} d^2. \tag{9}$$

В *ромбе* $a = b$, $\beta = \frac{\pi}{2}$,

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2, \quad S = a^2 \sin \alpha. \tag{10}$$

В *прямоугольнике* $\alpha = \frac{\pi}{2}$,

$$S = ab.$$

В *параллелограмме* $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$,

$$S = ah, \quad S = ab \sin \alpha. \tag{11}$$

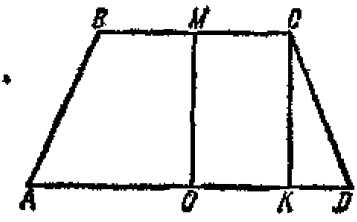


Рис. 26

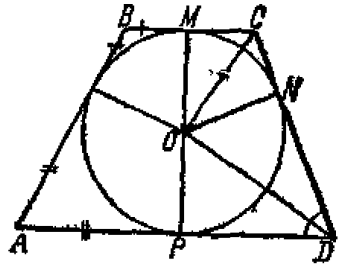


Рис. 27

В *трапеции* ($l_1$, $l_2$ — боковые стороны, $a$, $b$ — основания трапеции, $h$ — высота)

$$S = \frac{a+b}{2} h; \quad S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \beta, \tag{12}$$

где $\beta$ — величина угла между диагоналями.

*Длина средней линии трапеции* равна $\frac{a+b}{2}$.

В *равнобедренной* трапеции (рис. 26)

$$|BM| = |MC|, \ |AO| = |OD|, \ |AK| = |AO| + |OK| =$$
$$= \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|).$$

Следовательно, площадь такой трапеции выражается формулой

$$S = |AK| \cdot |CK|. \tag{13}$$

Если трапеция описана около окружности (рис. 27), то она обладает такими свойствами:

а) $|AB| + |CD| = |BC| + |AD|$;

б) $\overset{\frown}{COD} = 90°$. (14)

Если равнобедренная трапеция описана около окружности, то

$$|AB| = \frac{1}{2}(|BC| + |AD|), \quad S = |AB| \cdot h. \qquad (15)$$

Периметры подобных треугольников и многоугольников относятся, как длины соответствующих сторон, а площади относятся, как квадраты длин соответствующих сторон.

Метрические соотношения в круге (рис. 28):

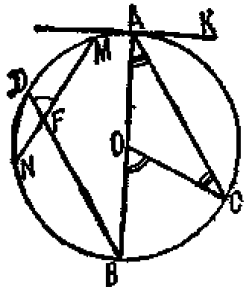



Рис. 28

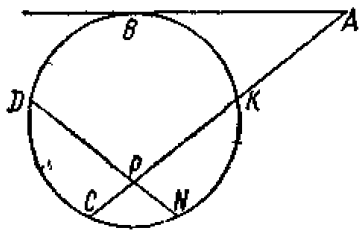



Рис. 29

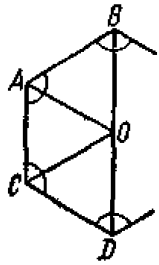



Рис. 30

$\overset{\frown}{BOC}$ равна угловой величине дуги $BC$; $\overset{\frown}{BAC}$ равна половине угловой величины дуги $BC$; $\overset{\frown}{KAC}$ равна половине угловой величины дуги $AC$; $\overset{\frown}{DFM}$ равна полусумме угловых величин дуг $DM$ и $NB$; величина угла, образованного двумя секущими, проведенными из внешней точки, равна полуразности угловых величин дуг, лежащих внутри его. Если в окружность вписан четырехугольник, то сумма величин любой пары противоположных углов равна 180°.

Пропорциональные отрезки в круге (рис. 29):

$$|AB|^2 = |AK| \cdot |AC|, \quad |DP| \cdot |PN| = |PC| \cdot |PK|. \qquad (16)$$

Обозначим: $l$ — длина дуги; $\alpha$ — величина центрального угла, опирающегося на эту дугу (в радианах); $C$ — длина окружности. Тогда

$$l = R\alpha, \quad C = 2\pi R, \quad S = \pi R^2. \qquad (17)$$

*Площадь кругового сектора*

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha. \qquad (18)$$

*Площадь кругового сегмента*

$$S = \frac{1}{2}(R^2\alpha - R^2\sin\alpha). \qquad (19)$$

Рассмотрим правильный $n$-угольник. Соединяя центр $O$ с вершинами (рис. 30), разбиваем его на $n$ треугольников. Очевидно, $\overset{\frown}{AOC} = \overset{\frown}{AOB} = \ldots = \frac{2\pi}{n}$. Сумма величин внутренних углов $n$-угольника $(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \ldots)$ равна $\pi \times (n-2)$. Имеем

$$r_n = R_n \cos\frac{\pi}{n}, \qquad (20)$$

$$a_n = 2R_n \sin\frac{\pi}{n}, \qquad (21)$$

где $r_n$ — радиус вписанной окружности, $R_n$ — радиус описанной окружности, $a_n$ — сторона $n$-угольника.

## § 2. Решение задач

**1.** (10.001) В прямоугольном треугольнике точка касания вписанной окружности делит гипотенузу на отрезки длиной 5 и 12 см. Найти катеты треугольника.

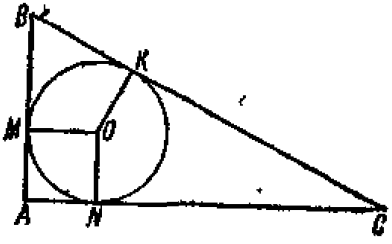



Рис. 31

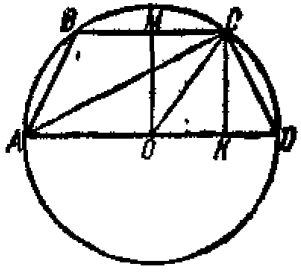



Рис. 32

Решение. Очевидно, $|BM| = |BK| = 5$ см, $|CN| = |CK| = 12$ см (рис. 31). Обозначим $|OK| = |OM| = |ON| = r$, тогда

$$|AB| = 5 + r,\ |AC| = 12 + r;\ |BC| = 17.$$

По теореме Пифагора

$$(|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2) \rightarrow ((5+r)^2 + (12+r)^2 = 17^2) \rightarrow$$
$$\rightarrow ((2r^2 + 34r - 120 = 0)) \Rightarrow (r_1 = 3,\ r_2 = -20).$$

(корень $r_2 = -20$ не подходит, так как $r > 0$). Следовательно,

$$|AB| = 5 + 3 = 8, \ |AC| = 12 + 3 = 15.$$

*Ответ:* 8 и 15 см.

**2.** (10.002) Найти диагональ и боковую сторону равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Решение. Точка $O$ — центр описанной окружности (рис. 32). Диагональ $AC$ и высоту $CK$ найдем из треугольников $ACK$ и $KCD$. Имеем

$$|AO| = \frac{1}{2}|AD| = 10, \ |OK| = |CM| = \frac{1}{2}|BC| = 6,$$

$$|KD| = |OD| - |OK| = 4, \ |KC| = \sqrt{|OC|^2 - |OK|^2} = 8,$$

$$AK| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|) = 16, \ |CD| = \sqrt{|KC|^2 + |KD|^2} =$$

$$= 4\sqrt{5}, \ |AC| = \sqrt{|KC|^2 + |AK|^2} = 8\sqrt{5}.$$

*Ответ:* $8\sqrt{5}$ и $4\sqrt{5}$ см.

**3.** (10.003) Найти радиус окружности, описанной около равнобедренной трапеции с основаниями, равными 21 и 9 см, и высотой 8 см.

Решение. Поскольку $|AK| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)$ (рис. 33), то имеем

$$|AK| = 15, \ |KD| = |AD| - |AK| = 6.$$

Из треугольников $ACK$ и $CKD$ получим

$$|AC| = \sqrt{|AK|^2 + |KC|^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17,$$

$$|CD| = \sqrt{|CK|^2 + |KD|^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10.$$

Далее рассмотрим треугольник $ACD$. Его площадь

$$S = \frac{1}{2}|AD| \cdot |CK| = \frac{1}{2} \cdot 21 \cdot 8 = 84.$$

Применяя формулу (5), получим

$$\left(R = \frac{abc}{4S}\right) \Rightarrow \left(R = \frac{10 \cdot 17 \cdot 21}{4 \cdot 84}\right) \Rightarrow \left(R = \frac{85}{8}\right).$$

*Ответ:* $\frac{85}{8}$ см.

**4.** (10.006) Две окружности радиусов $R = 3$ см и $r = 1$ см касаются внешне. Найти расстояния от точки касания окружностей до их общих касательных.

Решение. Проводим $[O_1K] \parallel [AB]$ (рис. 34). Далее имеем

$$|OK| = |AO| - |AK| = 2, \quad |OO_1| = 1 + 3 = 4, \quad |MN| = |MF| + |FN|, \quad |FN| = |O_1B| = 1.$$

Из подобия $\triangle O_1MF$ и $\triangle O_1OK$ составляем пропорцию

$$\left(\frac{|MF|}{|OK|} = \frac{|O_1M|}{|OO_1|}\right) \Rightarrow \left(\frac{|MF|}{2} = \frac{1}{4}\right).$$

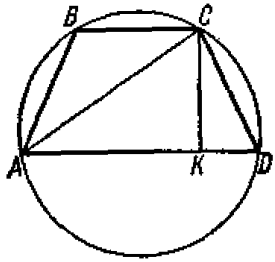


Рис. 33

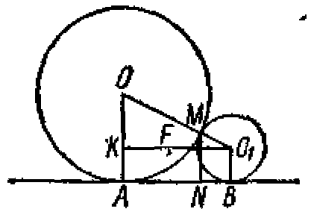


Рис. 34

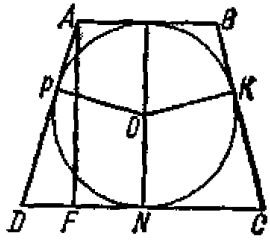


Рис. 35

Отсюда $|MF| = \frac{1}{2}$, следовательно, $|MN| = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$.

*Ответ:* $\frac{3}{2}$ см.

**5.** (10.007) Около окружности с диаметром 15 см описана равнобедренная трапеция с боковой стороной, равной 17 см. Найти основания трапеции.

Решение. Обозначим $|AB| = a$, $|CD| = b$ (рис. 35). Используя свойство (14), получим

$$|AD| = \frac{a+b}{2} = 17, \quad |FD| = \frac{b-a}{2} = \sqrt{|AD|^2 - |AF|^2} = 8.$$

Далее решим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{a+b}{2} = 17, \\ \frac{b-a}{2} = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b = 34, \\ b-a = 16, \end{cases} \Leftrightarrow (b = 25, \ a = 9).$$

**6.** (10.011) Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$ см, а медиана боковой стороны 5 см. Найти боковую сторону.

**7.** (10. 013) Центр окружности лежит на большей стороне треугольника, равной 18 см. Окружность касается остальных сторон треугольника, равных 12 и 15 см. В каком отношении центр окружности делит большую сторону треугольника?

**8.** (10.014) Через один конец хорды проведена касательная к окружности, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найти радиус окружности, если внутренний отрезок секущей равен 12 см, а хорда 10 см.

**9.** (10.024) Найти стороны равнобедренного треугольника, если высоты, опущенные на его основание и боковую сторону, равны соответственно 5 и 6 см.

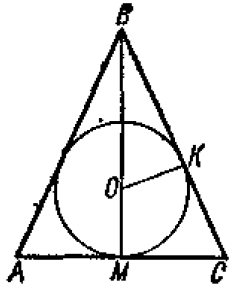


Рис. 36

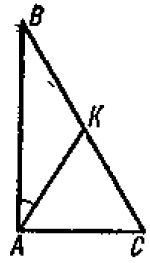


Рис. 37

**10.** (10.060) Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника соответственно равны 2 и 5 см. Найти катеты.

**11.** (10.019) Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки 5 и 3 см, считая от вершины. Найти стороны треугольника.

Решение. Очевидно, $|BM| = 8$ см (рис. 36). Треугольник $BOK$ подобен треугольнику $MBC$ (так как $[OK] \perp [BK]$, угол $OBK$ — общий), $|BK| = \sqrt{|OB|^2 - |OK|^2} = 4$. Из подобия треугольников $BOK$ и $MBC$ составим пропорцию $\frac{|BK|}{|BM|} = \frac{|OK|}{|MC|}$, откуда $|MC| = 6$, $|AC| = 12$. Из $\triangle BMC$ находим

$$|BC| = \sqrt{|BM|^2 + |CM|^2} = 10.$$

*Ответ:* 10 см; 12 см.

**12.** (10. 021) Медиана, проведенная к гипотенузе прямоугольного треугольника, равна $m$ и делит прямой угол в отношении 1 : 2. Найти стороны треугольника.

Решение. $|BK| = |KC|$, $\overset{\frown}{BAK} : \overset{\frown}{KAC} = 1 : 2$ (рис. 37). Обозначим $\overset{\frown}{BAK} = x$, тогда $\overset{\frown}{KAC} = 2x$, а сумма их равна $\frac{\pi}{2}$, откуда

$$\left(3x = \frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow \left(x = \frac{\pi}{6}\right).$$

Следовательно, $\overset{\frown}{KAC} = \frac{\pi}{3}$. Поскольку $|AK| = |KC| = \frac{1}{2}|BC|$, то треугольник $AKC$ — равнобедренный и, следовательно, $\overset{\frown}{KCA} = \frac{\pi}{3}$, т. е. треугольник $AKC$ — правильный. Далее

$$|AC| = |AK| = m, \ |BC| = 2m, \ |AB| = \sqrt{|BC|^2 - |AC|^2} = m\sqrt{3}.$$

**13.** (10.032) Длины двух сторон треугольника равны 6 и 3 см. Найти длину третьей стороны, если полусумма высот, опущенных на данные стороны, равна третьей высоте.

Решение. Площадь треугольника $S = \frac{1}{2} \cdot 6h_1 = \frac{1}{2} \times 3h_2$, откуда $h_2 = 2h_1$. Обозначим высоту $h_1 = x$, тогда $h_2 = 2x$, и третья высота равна $\frac{3x}{2}$. Обозначим третью сторону $a$, тогда $S = \frac{1}{2}a \cdot \frac{3x}{2}$. Так как $S = \frac{1}{2} \cdot 6x$, то получаем уравнение $6x = \frac{3ax}{2}$, откуда $a = 4$.

**14.** Найти все стороны и площадь равнобедренного треугольника, периметр которого равен $2p$ и углы при основании равны $\alpha$.

Решение. Обозначим длину боковой стороны $|AB| = x$, тогда $|AK| = x\cos\alpha$ (рис. 38), $|AC| = 2x\cos\alpha$, и составим уравнение $2p = 2x + 2x\cos\alpha$, откуда $x = \frac{p}{1 + \cos\alpha}$. Следовательно,

$$|AB| = |BC| = \frac{p}{1 + \cos\alpha}, \ |AC| = 2x\cos\alpha = \frac{2p\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}.$$

Поскольку $\overset{\frown}{ABC} = 180^\circ - 2\alpha$, то

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} x^2 \sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \times$$

$$\times \left(\frac{p}{1+\cos\alpha}\right)^2 \sin 2\alpha = p^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

**15.** (10.045) Найти радиусы двух пересекающихся окружностей, если расстояние между их центрами равно $\sqrt{3}+1$, а их общая хорда видна из центров под углами 90° и 60°.

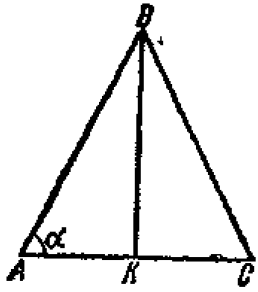



Рис. 38

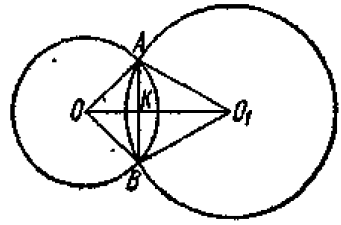



Рис. 39

Решение. Рассмотрим треугольники $OAK$ и $AKO_1$ (рис. 39). Обозначим $|OA| = x$, $|O_1A| = y$. Так как $\overset{\frown}{AOK} = 45^\circ$, $\overset{\frown}{AO_1K} = 30^\circ$, то из треугольника $OAO_1$ по теореме синусов получаем

$$\frac{x}{\sin 30^\circ} = \frac{y}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^\circ}.$$

Решая полученные уравнения, находим

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sin 105^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sin(60^\circ+45^\circ)} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1)} = \sqrt{2};$$

$$y = 2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

*Ответ:* 2 и $\sqrt{2}$.

**16.** (10.077) Найти биссектрису при основании равнобедренного треугольника, у которого боковая сторона равна 20 см, а основание 5 см.

Решение. Используя свойство биссектрисы $AD$ (рис. 40), получим $\frac{|BD|}{|DC|} = \frac{20}{5} = 4$. Обозначим $|DC| = y$, тогда

$|BD| = 4y$; $(|BC| = 5y) \Rightarrow (20 = 5y) \rightarrow (y = 4)$; $|DC| = 4$.

Из треугольника $ADC$ находим по теореме косинусов

$$|AD| = \sqrt{|AC|^2 + |DC|^2 - 2|AC| \cdot |DC| \cos \widehat{C}},$$

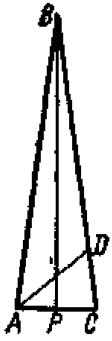


Рис. 40

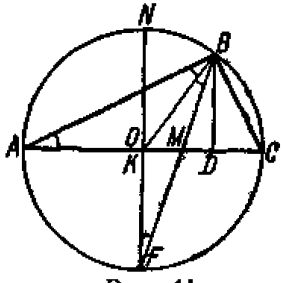


Рис. 41

а $\cos \widehat{C}$ найдем из треугольника $BPC$:

$$\cos \widehat{C} = \frac{|PC|}{|BC|} = \frac{2{,}5}{20} = \frac{1}{8}.$$

Итак, $|AD| = \sqrt{25 + 16 - 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{1}{8}} = 6$.

**17.** Медиана, биссектриса и высота треугольника, выходящие из одной вершины, делят угол на четыре равные части. Найти углы треугольника.

Решение. Опишем окружность вокруг треугольника $ABC$ (рис. 41). Легко показать, что $[BF)$ — биссектриса, $[BK]$ — медиана (так как диаметр $NF \perp [AC]$, то он делит хорду $AC$ и дугу $AFC$ на две равные части). По условию $\overset{\frown}{KBM} = \overset{\frown}{MBD}$, но $\overset{\frown}{MBD} = \overset{\frown}{BFN}$ как накрестлежащие углы при параллельных прямых $BD$ и $NF$. Следовательно, треугольник $BKF$ — равнобедренный. Это возможно лишь тогда, когда точка $K$ — центр окружности ($|BK| = |KF| = R$). Таким образом, точка $K$ совпадает с центром окружности и $\overset{\frown}{ABC} = \frac{\pi}{2}$.

Отсюда получим: $\overset{\frown}{BAC} = \overset{\frown}{KBA} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8}$, $\overset{\frown}{ACB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$.

*Ответ:* $\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}$.

**18.** Каждая из боковых сторон и меньшее основание трапеции равны $a$, острые углы равны $\alpha$. Найти площадь трапеции и радиус описанной окружности.

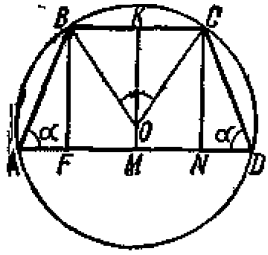



Рис. 42

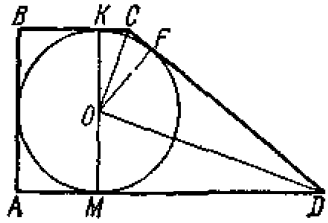



Рис. 43

Решение. Так как $|AB| = |BC| = |CD|$, то $\overset{\smile}{AB} = \overset{\smile}{BC}$ (рис. 42). Учитывая, что $(\overset{\frown}{ADC} = \alpha) \Rightarrow (\overset{\smile}{ABC} = 2\alpha)$, $\overset{\smile}{BC} = \alpha$, $\overset{\frown}{BOC} = \alpha$. Из треугольника $KOC$ находим

$$R = \frac{a}{2 \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Из треугольника $ABF$ находим $|AF| = a \cos \alpha$, $|BF| = a \sin \alpha$. Очевидно,

$$|AN| = |AM| + |MN| = \frac{1}{2}|AD| + \frac{1}{2}|BC| = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|),$$

но

$$|AN| = |AF| + |FN| = a \cos \alpha + a = a(\cos \alpha + 1).$$

Таким образом,

$$S_{ABCD} = |AN| \cdot |BF| = a^2 \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

**19.** (10.191) Найти стороны и площадь прямоугольной трапеции, если центр вписанной окружности удален от концов ее боковой стороны на расстояния 3 и 9 см.

**Решение.** Так как центр вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис $CO$ и $OD$ (рис. 43), то $\widehat{OCF} = \frac{1}{2}\widehat{KCF}$, $\widehat{ODF} = \frac{1}{2}\widehat{FDM}$. Поскольку $\widehat{KCF} + \widehat{FDM} = \pi$, то $\widehat{OCF} + \widehat{FDO} = \frac{\pi}{2}$ *и треугольник* $COD$ *прямоугольный*. По теореме Пифагора находим

$$|CD| = \sqrt{3^2 + 9^2} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}.$$

Чтобы найти $|AB| = 2r$, рассмотрим треугольник $COD$:

$$\left(S = \frac{1}{2}|CO| \cdot |OD| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 9 = \frac{27}{2}\right) \Rightarrow \left(S = \frac{1}{2} r \cdot |CD|\right).$$

Отсюда $r = \frac{9}{\sqrt{10}}$, $|AB| = 2r = \frac{18}{\sqrt{10}}$. Далее,

$$|BC| = |BK| + |KC| = r + |KC|, \quad |AD| = |AM| + |MD| = r + |MD|.$$

Из треугольника $OKC$ находим $|KC| = \sqrt{|OC|^2 - r^2} = \sqrt{\frac{9}{10}}$, а из треугольника $OMD$ находим $|MD| = \frac{27}{\sqrt{10}}$. Тогда

$$|BC| = \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{12}{\sqrt{10}}, \quad |AD| = \frac{9}{\sqrt{10}} + \frac{27}{\sqrt{10}} = \frac{36}{\sqrt{10}}.$$

Теперь легко найти площадь

$$S = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|) \cdot 2r = 43{,}2.$$

*Ответ:* $\frac{12}{\sqrt{10}}$ см; $\frac{36}{\sqrt{10}}$ см; $3\sqrt{10}$ см; 43,2 см$^2$.

**20.** (10.148) Найти площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна $h$, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом $\alpha$.

**Решение.** Поскольку $\widetilde{CD} = \alpha$, то, следовательно, $\widehat{CAD} = \frac{\alpha}{2}$ (рис. 44). Тогда $|AK| = h \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (из треугольника $CAK$) и площадь трапеции

$$S = |AK|h = h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

**21.** Найти площадь трапеции (рис. 45), если $S_{\triangle BOC} = S_1$, $S_{\triangle AOD} = S_2$.

Решение. Поскольку $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACD}$ (одинаковые основания и высота), то $S_{\triangle AOB} = S_{\triangle COD}$. Обозначим $S_{\triangle AOB} = S_3$, $\angle AOB = \alpha$, тогда $\angle BOC = \pi - \alpha$. Запишем формулы для площадей:

$$S_3 = \frac{1}{2}|AO| \cdot |OB| \sin\alpha, \quad S_1 = \frac{1}{2}|BO|\,|OC| \sin(\pi - \alpha).$$

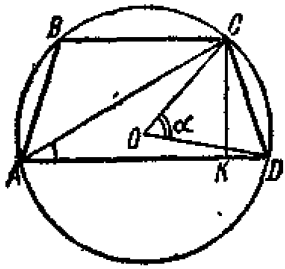



Рис. 44

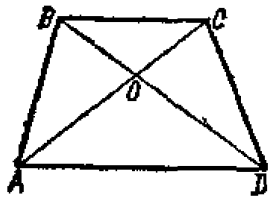



Рис. 45

Так как $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, то имеем $\frac{S_3}{S_1} = \frac{|AO|}{|OC|}$. Аналогично

$$\left(S_{\triangle OCD} = S_3 = \frac{1}{2}|OC| \cdot |OD| \sin\alpha,\ S_2 = \frac{1}{2}|AO| \cdot |OD| \times \right.$$

$$\left. \times \sin\alpha\right) \Rightarrow \left(\frac{S_3}{S_2} = \frac{|OC|}{|AO|}\right).$$

Умножая обе части полученных равенств, получим

$$\frac{S_3^2}{S_1 S_2} = 1,$$

откуда

$$S_3 = \sqrt{S_1 S_2};\ S = S_1 + S_2 + 2S_3 = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2.$$

*Ответ:* $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$.

**22.** Доказать, что площадь треугольника, стороны которого конгруэнтны медианам данного треугольника, равна $\frac{3}{4}$ площади данного треугольника.

Решение. Рассмотрим треугольник $ABC$, в котором $[AK]$, $[MC]$, $[BD]$ — медианы (рис. 46). Через точку $K$ проведем прямую $KE$, параллельную $[BD]$. Продлим ме-

диану $BD$ и от точки $D$ отложим отрезок $DF$, конгруэнтный $[OD]$. Через точки $A$ и $F$ проводим прямую до пересечения с $(KE)$, получим точку $N$. В треугольниках $ABC$ и $AOC$ проведем высоты $BL$ и $OP$.

Таким образом, следует доказать, что

$$S_{\triangle AKN} = \frac{3}{4} S_{\triangle ABC}.$$

Рассмотрим треугольники $ADF$ и $ODC$. Они конгруэнтны, так как $|OD| = |DF|$, $|AD| = |DC|$, $\angle ADF = \angle ODC$. Из конгруэнтности этих треугольников вытекает, что $|AF| = |OC| = \frac{2}{3}|MC|$. Таким образом, $S_{\triangle AOF} = S_{\triangle AOC}$, но $S_{\triangle AOC} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC}$, так как у них общее основание, а высота треугольника $AOC$ равна $\frac{1}{3}$ высоты треугольника $ABC$ (это следует из подобия треугольников $BLD$ и $POD$: $\frac{|OP|}{|BL|} = \frac{|OD|}{|BD|} = \frac{1}{3}$). В треугольнике $AOF$ имеем $|AO| = \frac{2}{3}|AK|$, $|OF| = \frac{2}{3}|BD|$, $|AF| = \frac{2}{3}|CM|$, следовательно, сторонами подобного треугольника $AKN$ будут медианы треугольника $ABC$. Поскольку стороны треугольника $AKN$ в $\frac{3}{2}$ раза больше сторон треугольника $AOF$, то

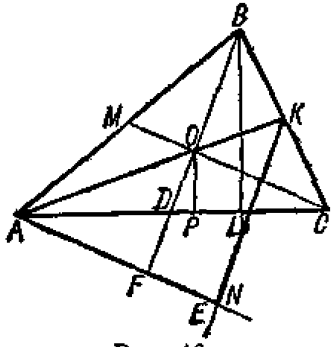


Рис. 46

$$S_{\triangle AKN} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 S_{\triangle AOF} = \frac{9}{4} S_{\triangle AOF} = \frac{9}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} = \frac{3}{4} \times S_{\triangle ABC},$$

что и требовалось доказать.

23. (10.321) Медианы треугольника равны 3, 4 и 5 см. Определить площадь треугольника.

Решение. Используя решение предыдущей задачи, получим, учитывая, что треугольник со сторонами 3, 4 и 5 — прямоугольный:

$$S_1 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6 \text{ см}^2; \quad S_2 = \frac{4}{3} S_1 = \frac{4}{3} \cdot 6 = 8 \text{ см}^2.$$

*Ответ:* 8 см$^2$.

**24.** (10.198) Биссектрисы тупых углов при основании трапеции пересекаются на другом ее основании. Найти все стороны трапеции, если ее высота равна 12 см, а длины биссектрис 15 и 13 см.

Решение. Из прямоугольного треугольника $AKM$ (рис. 47) находим $|AM| = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$, а из треугольника $MKD$ находим $|MD| = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$. Тогда

$$|AD| = |AM| + |MD| = 14 \text{ см}.$$

Так как $[AK]$ — биссектриса угла $BAM$, то $\widehat{BAK} = \widehat{KAM}$, но $\widehat{KAM} = \widehat{BKA}$ как накрестлежащие углы при параллельных прямых. Поэтому треугольник $ABK$ равнобедренный ($|AB| = |BK|$); проведем в этом треугольнике высоту $BN$, тогда $|NK| = \frac{|AK|}{2} = 6{,}5$. Из подобия треугольников $BNK$ и $AKM$ находим

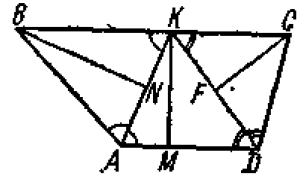


Рис. 47

$$\left(\frac{|BK|}{|AK|} = \frac{|NK|}{|AM|}\right) \leftrightarrow \left(|BK| = \frac{|AK|\ |NK|}{|AM|}\right) \Rightarrow (|BK| = 16{,}9).$$

Следовательно, $|AB| = 16{,}9$.

Аналогично доказываем, что треугольник $KCD$ равнобедренный ($|KC| = |CD|$) и что треугольник $KCF$ подобен треугольнику $MKD$. Из подобия этих треугольников получаем $\frac{|KC|}{|KD|} = \frac{|KF|}{|MD|}$, где $|KF| = \frac{1}{2}|KD| = 7{,}5$. Далее имеем $|KC| = \frac{|KD|\,|KF|}{|MD|} = 12{,}5$.

Следовательно, $CD = 12{,}5$.

Находим основание $BC$ трапеции:

$$|BC| = |BK| + |KC| = 16{,}9 + 12{,}5 = 29{,}4 \text{ см}.$$

**25.** (10, 231) В прямоугольную трапецию вписана окружность радиуса $r$. Найти стороны трапеции, если ее меньшее основание равно $\frac{4}{3}r$.

**26.** (10. 246) Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстояния 8 и 4 см. Найти среднюю линию трапеции.

**27.** (10. 096) Площадь равнобедренной трапеции, описанной около окружности, равна $32\sqrt{3}$ см$^2$. Определить боковую сторону трапеции, если известно, что острый угол при основании равен $\frac{\pi}{3}$.

**28.** (10. 123) Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна $S$. Определить боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен $\alpha$.

**29.** (10. 132) В круговой сектор, дуга которого $\alpha$, вписан круг. Найти отношение площади этого круга к площади сектора.

**30.** (10. 134) В равнобедренной трапеции нижнее основание равно 40 см, а верхнее 24 см. Диагонали этой трапеции взаимно перпендикулярны. Найти ее площадь.

**31.** (10. 163) Стороны треугольника равны 13, 14 и 15 см. Найти отношение площадей описанного и вписанного в этот треугольник кругов.

**32.** (10.166) Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15 см, а радиус окружности, вписанной в этот треугольник, равен 3 см. Найти площадь этого треугольника.

**33.** (10. 170) В круг радиуса $r$ вписан прямоугольник, площадь которого вдвое меньше площади круга. Определить стороны прямоугольника.

**34.** (10. 170) Определить площадь круга, вписанного в сектор круга радиуса $R$ с хордой $2a$.

**35.** (10. 175) Найти площадь равнобедренного треугольника, если основание его равно $a$, а высота, опущенная на основание, равна длине отрезка, соединяющего середины основания и боковой стороны.

**36.** Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 1 и 2 см. Найти площадь трапеции.

**37.** (10. 310) Высота равнобедренной трапеции равна 14 см, а основания равны 16 и 12 см. Определить площадь описанного круга.

**38.** (10. 294) Две окружности радиусов $R$ и $r$ касаются внешне. Найти площадь трапеции, образованной двумя общими касательными к этим окружностям и хордами, соединяющими точки касания.

**39.** (10. 319) Диагонали равнобедренной трапеции взаимно перпендикулярны, а площадь ее равна $a^2$. Определить высоту трапеции.

## § 3. Задачи на построение и доказательство

**40.** Найти внутри данного треугольника точку, расстояния от которой до сторон треугольника относятся как $m : n : p$.

Решение. На рис. 48 изображены данные отрезки $m$, $n$, $p$ и треугольник $ABC$. Необходимо внутри этого треугольника найти точку, расстояния от которой до сторон $AB$, $AC$, $BC$ пропорциональны соответственно отрезкам $m$, $n$, $p$. Из точки $C$ восстановим перпендикуляр $CK$ ($|CK| = m$) и через точку $K$ проведем прямую, параллельную $[AC]$. Затем из точки $A$ проведем $[AM] \perp [AB]$ ($|AM| = n$) и через точку $M$ проведем прямую, параллельную $[AB]$.

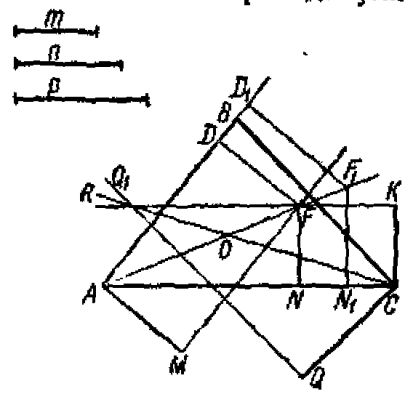


Рис. 48

Прямые, проведенные через точки $K$ и $M$, пересекутся в точке $F$ (она может находиться как внутри, так и вне треугольника). Соединив точку $A$ с $F$, получим прямую $AF$, которая является множеством точек, расстояния которых от $[AC]$ и $[AB]$ пропорциональны отрезкам $m$ и $n$. Действительно, пусть $F_1$ — произвольная точка прямой $AF$. Проведем $[F_1N_1] \perp [AC]$; $[F_1D_1] \perp [AB]$. Учитывая, что $|FN| = m$, $|FD| = n$, из подобия треугольников $AFN$ и $AF_1N_1$ получим

$$\frac{|F_1N_1|}{|FN|} = \frac{|AF_1|}{|AF|}, \tag{22}$$

а из подобия треугольников $AFD$ и $AF_1D_1$ получим

$$\frac{|F_1D_1|}{|DF|} = \frac{|AF_1|}{|AF|}. \tag{23}$$

Сравнивая левые и правые части соотношений (22) и (23), находим

$$\frac{|F_1D_1|}{|F_1N_1|} = \frac{m}{n}.$$

Аналогично строим прямую $CR$, являющуюся множеством точек, расстояния которых от $[AC]$ и $[BC]$ пропорци-

нальны отрезкам $m$ и $p$. Для этого проводим $[CQ] \perp [BC]$ ($|CQ| = p$), затем прямую $QQ_1$, параллельную $[BC]$. Соединив точку $C$ с точкой пересечения прямых $QQ_1$ и $KF$, получим прямую $CR$. Точка $O$ (точка пересечения прямых $CR$ и $AF$) будет искомой.

**41.** Построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, исходящим из одной вершины.

Решение. Используя решение задачи 17, получим способ построения треугольника $ABC$ по заданным отрезкам $h$, $b$, $m$ (здесь $h$ — высота, $b$ — биссектриса, $m$ — медиана). Для этого на произвольной прямой возьмем точку $D$ и восстановим перпендикуляр $DB$ ($|DB| = h$), затем проведем $[BM]$ и $[BK]$ ($|BM| = b$, $|BK| = m$). Из точки $K$ восстановим перпендикуляр $KN$. Затем отрезок $BM$ продлим до пересечения с прямой $KN$ и получим точку $F$. Так как $BF$ хорда описанной около треугольника окружности, то проводим через ее середину прямую, перпендикулярную к $BF$, тогда точка $O$ (точка пересечения прямых $NF$ и $OP$) будет центром описанной окружности, а $[OF]$ — радиусом. Описывая окружность, получим точки $A$ и $C$; соединяя их с точкой $B$, получим искомый треугольник $ABC$ (рис. 49).

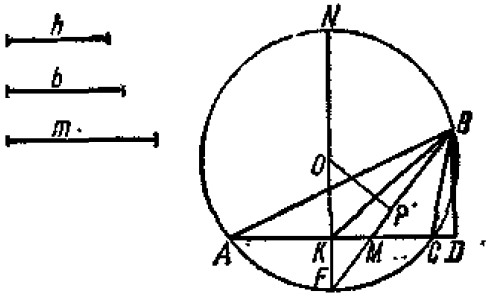


Рис. 49

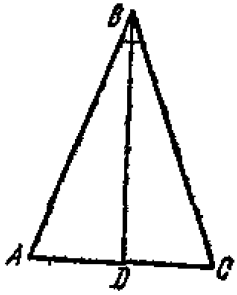


Рис. 50

**42.** В равнобедренном треугольнике с основанием $a$ и боковой стороной $b$ угол при вершине равен 20°. Доказать, что

$$a^3 + b^3 = 3ab^2.$$

Решение. Из прямоугольного $\triangle ABD$ (рис. 50) имеем

$$\frac{a}{2} = b \sin 10°, \quad a = 2b \sin 10°.$$

Далее рассмотрим равносильные равенства

$$(a^3 + b^3 = 3ab^2) \Rightarrow (8\sin^3 10^\circ + 1 = 6\sin 10^\circ) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2} = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ\right).$$

Применяя формулу $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, получим $3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

43. В трапеции $ABCD$ сумма углов при основании $AD$ равна $\frac{\pi}{2}$. Доказать, что отрезок, соединяющий середины оснований, равен полуразности оснований.

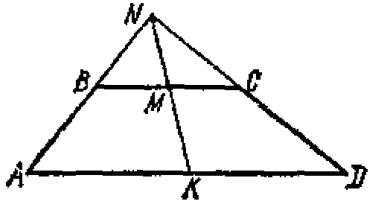


Рис. 51

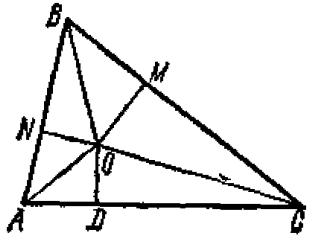


Рис. 52

Решение. Продлим боковые стороны трапеции до пересечения в точке $N$ (рис. 51), получим прямоугольные треугольники $AND$ и $BNC$. Так как $|NK| = \frac{1}{2}|AD|$, $|NM| = \frac{1}{2}|BC|$, то

$$|KM| = |NK| - |NM| = \frac{1}{2}\left(|AD| - |BC|\right).$$

44. Расстояния от точки $O$, лежащей внутри треугольника, до сторон равны $x$, $y$, $z$, а высоты, опущенные на соответствующие стороны, равны $m$, $n$, $p$. Доказать, что $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{p} = 1$.

Решение. Очевидно,

$$S = S_{\triangle AOC} + S_{\triangle BOC} + S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}(ax + by + cz),$$

где $a$, $b$, $c$ — стороны треугольника $ABC$ (рис. 52), $S$ — его площадь. Учитывая, что $S = \frac{1}{2}am = \frac{1}{2}bn = \frac{1}{2}cp$,

получим

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{2S}{m}x + \frac{2S}{n}y + \frac{2S}{p}z\right),$$

откуда и находим нужное равенство.

**45.** В равнобедренном треугольнике отношение сторон равно $k (k \neq 1)$. Внутри этого треугольника построен другой треугольник, вершинами которого есть точки пересечения биссектрис со сторонами. Доказать, что отношение площадей этих треугольников равно $\left(\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k}}\right)^2$.

**46.** Прямая, параллельная основанию треугольника, делит его на равновеликие части. Доказать, что стороны треугольника разделятся в отношении $(\sqrt{2} - 1) : 1$.

**47.** Прямая, параллельная основанию треугольника, площадь которого $S$, отсекает от него треугольник с площадью $S_1$. Доказать, что площадь четырехугольника, три вершины которого совпадают с вершинами маленького треугольника, а четвертая находится на основании большого треугольника, равна $\sqrt{S_1 S}$.

**48.** Построить прямоугольный треугольник по данной гипотенузе $c$ и высоте $h$, опущенной на гипотенузу. Найти длины катетов и выяснить, при каком соотношении между $h$ и $c$ задача разрешима.

**49.** Построить треугольник по точкам пересечения продолжений биссектрисы, медианы и высоты, выходящих из одной вершины, с окружностью, описанной около треугольника.

**50.** Пересечь трапецию прямой, параллельной основаниям, так, чтобы ее отрезок внутри трапеции делился диагоналями на три равные части.

**51.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ катет $AC$ в 3 раза больше катета $AB$. Точками $K$ и $F$ катет $AC$ разделен на три равные части. Доказать, что $\widehat{AKB} + \widehat{AFB} + \widehat{ACB} = \frac{\pi}{2}$.

**52.** Пусть $a$, $b$ — катеты прямоугольного треугольника, $c$ — гипотенуза, $h$ — высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу. Доказать, что треугольник со сторонами $h$, $c + h$, $a + b$ является прямоугольным.

**53.** Доказать, что касательные к окружности, проведенные через вершины прямоугольника, вписанного в эту окружность, образуют ромб.

**54.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ угол при вершине равен 20°. На боковых сторонах $AB$ и $BC$ взяты соответственно точки $Q$ и $P$ так, что $\widehat{ACQ} = 60°$, а $\widehat{CAP} = 50°$. Доказать, что $\widehat{APQ} = 80°$.

**55.** На стороне $AB$ и на продолжении стороны $AC$ треугольника $ABC$ отложены конгруэнтные отрезки $|BD| = |CE|$. Доказать, что отрезок $DE$ делится стороной $BC$ в отношении, обратном отношению $|AB|$ и $|AC|$.

**56.** Доказать, что во всяком треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из *той же вершины*.

**57.** (10.265) Доказать, что в прямоугольном треугольнике сумма длин катетов равна сумме длин диаметров вписанной и описанной окружностей.

**58.** Доказать, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна сумме квадратов боковых сторон с удвоенным произведением оснований.

**59.** Доказать, что прямая, соединяющая середины параллельных сторон трапеции, пройдет через точку пересечения диагоналей.

**60.** Доказать, что если отрезок, соединяющий середины противоположных сторон четырехугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырехугольник — трапеция.

**61.** Две окружности касаются друг друга внутренне в точке $A$. Отрезок $AB$ является диаметром большей окружности. Хорда $BK$ большей окружности касается меньшей окружности в точке $C$. Доказать, что $[AC]$ является биссектрисой треугольника $ABK$.

**62.** В сектор круга радиуса $R$ вписана окружность радиуса $r$. Хорда сектора равна $2a$. Доказать, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

**63.** Доказать, что если диаметр полукруга разделить на две произвольные части и на каждой из них описать полукруг внутри данного полукруга, то площадь, заключенная между тремя полуокружностями, будет равна площади круга, диаметр которого равен длине перпендикуляра, восстановленного внутри исходного полукруга из точки деления его диаметра.

**64.** Построить прямоугольный треугольник по катету и сумме второго катета и гипотенузы.

65. Построить треугольник по углу и двум высотам, опущенным на стороны данного угла.

66. Построить треугольник по стороне, сумме двух других сторон и высоте, опущенной на одну из этих сторон.

67. Построить прямоугольный треугольник по сумме двух катетов и углу, лежащему против одного из катетов.

68. Построить треугольник по основанию, противолежащему углу и медиане, проведенной к основанию.

69. Построить треугольник по трем медианам.

70. Доказать, что в прямоугольном треугольнике куб гипотенузы больше суммы кубов катетов.

71. Доказать, что во всяком треугольнике произведение двух сторон равно произведению высоты, опущенной на третью сторону, и диаметра описанной окружности.

72. Доказать, что вписанная в прямоугольный треугольник окружность точкой касания делит гипотенузу на отрезки, произведение которых равно площади данного треугольника.

ГЛАВА XVII

# СТЕРЕОМЕТРИЯ

## § 1. Основные определения и формулы

Многогранник, две грани которого конгруэнтные $n$-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные $n$ граней — параллелограммы, называется *$n$-угольной призмой*. *Прямой призмой* называется призма, боковые ребра которой перпендикулярны к плоскостям оснований. Если боковые ребра призмы не перпендикулярны к плоскостям оснований, то ее называют *наклонной призмой*. Отрезок перпендикуляра к плоскостям оснований призмы, концы которого принадлежат этим плоскостям, называют *высотой призмы*. Прямая призма, основанием которой является правильный $n$-угольник, называется *правильной призмой*.

*Параллелепипед* — это призма, основаниями которой служат параллелограммы. *Прямой параллелепипед* — это параллелепипед, боковые ребра которого перпендикулярны к плос-

кости его основания. *Прямоугольный параллелепипед* — это прямой параллелепипед, основанием которого служит прямоугольник. Длины трех ребер прямоугольного параллелепипеда, выходящих из одной вершины, называются *измерениями прямоугольного параллелепипеда.* Прямоугольный параллелепипед с равными измерениями называется *кубом*. Все грани куба — конгруэнтные квадраты.

*Пирамида* — многогранник, одна из граней которого произвольный многоугольник (основание), а остальные грани — треугольники (боковые грани), имеющие общую вершину. Если основанием пирамиды является правильный многоугольник, а ортогональная проекция вершины на плоскость основания совпадает с центром основания, то такая пирамида называется *правильной. Усеченная пирамида* — это многогранник, вершинами которого служат вершины основания пирамиды и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.

Площадь боковой поверхности и площадь полной поверхности многогранника — суммы площадей боковых граней и всех граней соответственно.

Приведем основные формулы для многогранников, применяя следующие обозначения: $H$ — высота; $P$ — периметр основания; $S_п$ и $P_п$ — соответственно площадь и периметр перпендикулярного сечения; $S$ — площадь основания; $a$ — апофема (высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины); $S_б$ и $S_{пол}$ — площади боковой и полной поверхности; $l$ — длина образующей или бокового ребра; $V$ — объем; $P_1$, $P_2$, $S_1$, $S_2$ — периметры и площади оснований усеченной пирамиды.

*Призма:*

$$S_б = P_п \cdot l, \quad S_{пол} = S_б + 2S,$$
$$V = S \cdot H, \quad V = S_п \cdot l.$$

*Пирамида:*

$$S_б = \frac{1}{2} P \cdot a \text{ (правильная)}, \quad S_{пол} = S_б + S,$$
$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

*Усеченная пирамида:*

$$S_б = \frac{a}{2}(P_1 + P_2), \quad V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получим подобные пирамиды. Обозначим $H_1$, $S_1$, $V_1$ соответственно высоту, боковую поверхность и объем меньшей пирамиды, а $H$, $S$, $V$ — соответствующие параметры всей пирамиды. Тогда получим $\frac{H_1}{H} = k$, $\frac{S_1}{S} = k^2$, $\frac{V_1}{V} = k^3$, где $k$ — коэффициент подобия.

*Цилиндр* — фигура, полученная при вращении прямоугольника $AOO_1B$ вокруг оси $OO_1$ (рис. 53).

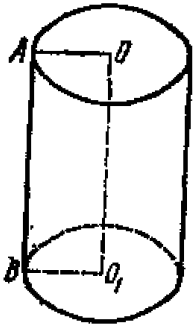


Рис. 53

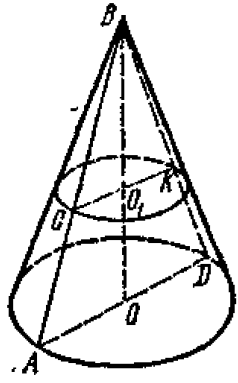


Рис. 54

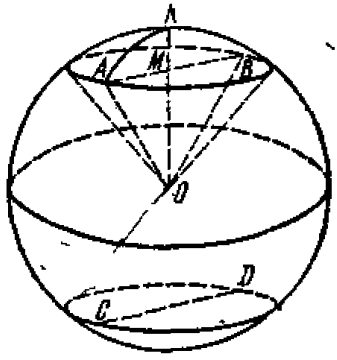


Рис. 55

*Конус* — фигура, полученная при вращении прямоугольного треугольника $ABO$ (рис. 54) вокруг оси, содержащей один из катетов. *Усеченный конус* — часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным плоскости основания.

*Шар* — множество всех точек пространства, находящихся от данной точки на расстоянии, не большем $R$ (рис. 55). *Шаровой сектор* (рис. 55) — фигура, образованная при вращении кругового сектора $AOK$ вокруг $[OK]$. *Шаровой сегмент* (слой) — фигура, полученная при вращении кругового сегмента вокруг диаметра, перпендикулярного к его хорде (рис. 55).

Приведем основные обозначения: $R$ — радиус шара, $h = |KM|$ — высота сегмента, $r$ — радиус основания цилиндра или конуса, $r_1$ — радиус верхнего основания усеченного конуса, $H$ — высота цилиндра или конуса, $l$ — образующая конуса. Теперь запишем основные формулы для круглых тел.

*Цилиндр:*

$$S_б = 2\pi rH;\ S_{пол} = 2\pi r(H + r);\ V = \pi r^2 H.$$

*Конус:*

$$S_б = \pi rl;\ S_{пол} = \pi r(r + l);\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

*Усеченный конус:*

$$S_б = \pi l(r_1 + r);\ V = \frac{1}{3}\pi H(r_1^2 + r^2 + r_1 r).$$

*Шар:*

$$S = 4\pi R^2;\ V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

*Шаровой сегмент:*

$$S = 2\pi Rh;\ V = \pi h^2\left(R - \frac{h}{3}\right).$$

*Шаровой сектор:*

$$S_{пол} = \pi R(2h + \sqrt{2Rh - h^2});\ V = \frac{2}{3}\pi R^2 h.$$

Рассмотрим пирамиду, в основании которой лежит произвольный выпуклый многоугольник (рис. 56). Если

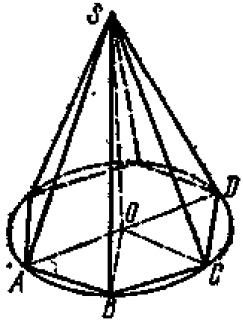


Рис. 56

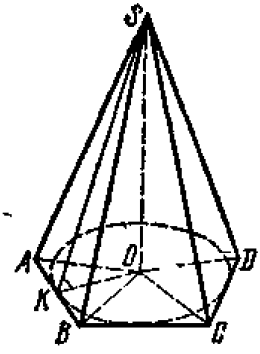


Рис. 57

все боковые ребра этой пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, т. е. $\widehat{SAO} = \widehat{SBO} = \widehat{SCO} = \cdots$, то $|AO| = |BO| = |CO| = \cdots$. Следовательно, точка $O$ будет центром окружности, описанной около основания пирамиды.

Если все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, тогда точка $O$ — центр окружности, вписанной в многоугольник, лежащий в основании пирамиды. Обозначим через $\alpha$ величину угла наклона боковой

грани к плоскости основания (двугранный угол при основании). Выведем соотношения (рис. 57):

$$S_{\triangle SAB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|SK|,\quad S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|AB|\cdot|OK|.$$

Отсюда

$$\left(\frac{S_{\triangle AOB}}{S_{\triangle SAB}}=\frac{|OK|}{|SK|}=\cos\alpha\right)\Rightarrow\left(S_{\triangle SAB}=\frac{S_{\triangle AOB}}{\cos\alpha}\right).$$

Если сложим площади всех боковых граней, то получим $S_б$ (площадь боковой поверхности). При этом сумма площадей проекций боковых граней равна площади основания $S$. Таким образом, получена следующая формула: $S_б=\frac{S}{\cos\alpha}$ (для пирамид, у которых все боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания).

## § 2. Задачи на вычисление

1. (12.060) В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной $a$ и углом при вершине $\alpha$. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Определить объем пирамиды.

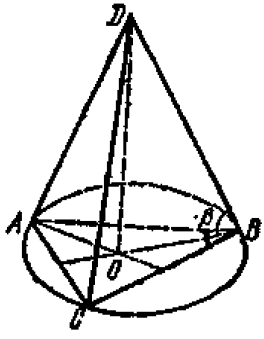


Рис. 58

Решение. Объем пирамиды найдем по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot H$. Имеем $|AB|=|BC|=a$, $\widehat{ABC}=\alpha$, $\widehat{DBO}=\beta$. (рис. 58).

Площадь основания пирамиды

$$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot|BC|\sin\alpha=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.$$

Остается найти высоту $H$. Поскольку все ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то высота проектируется в центр описанной окружности. Поэтому необходимо найти радиус описанной окружности $|AO|=R$. Обозначим $\widehat{BCA}=x$ и применим теорему синусов, получим $\frac{|AB|}{\sin x}=2R$, где $x=\frac{180^\circ-\alpha}{2}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$. Отсюда

$$R=\frac{a}{2\sin\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника $BOD$ находим

$$H = R \operatorname{tg} \beta = \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Тогда объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin \alpha \frac{a \operatorname{tg} \beta}{2 \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3 \operatorname{tg} \beta \sin \frac{\alpha}{2}}{6}.$$

**2.** В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с гипотенузой $c$ и острым углом $\alpha$. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Найти объем пирамиды.

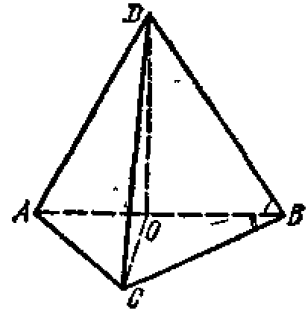


Рис. 59

Решение. Так как в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы и имеем $R = \frac{c}{2}$ (рис. 59). Из прямоугольного треугольника $BOD$ находим

$$H = R \operatorname{tg} \beta = \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Для определения площади основания пирамиды воспользуемся формулой

$$S = \frac{1}{2} |AC| \cdot |CB|.$$

Имеем

$$|AC| = c \cdot \sin \alpha, \quad |BC| = c \cdot \cos \alpha.$$

Тогда

$$S = \frac{1}{2} c^2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha$$

и

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} c^2 \sin 2\alpha \cdot \frac{c}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{c^3}{24} \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta.$$

**3.** (11.004) Найти объем наклонной треугольной призмы, у которой площадь одной из боковых граней равна $S$, а расстояние от плоскости этой грани до противолежащего ребра равно $d$.

Решение. По условию задачи $|KM| = d$, $S_{CC_1B_1B} = S$ (рис. 60). Объем призмы находим по формуле

$$V = S_{\triangle CKB} \cdot l,$$

где $\triangle CKB$ — перпендикулярное сечение, а $|CC_1| = l$. Далее имеем $S_{\triangle CKB} = \frac{1}{2}|KM| \cdot |BC|$. Тогда

$$V = \frac{1}{2}|KM| \cdot |BC| l = \frac{1}{2} dl |BC|.$$

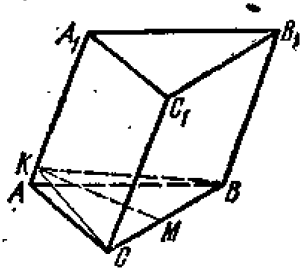


Рис. 60

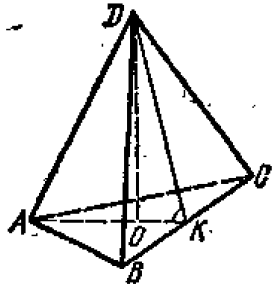


Рис. 61

Поскольку $l|BC| = S$, имеем

$$V = \frac{1}{2} d \cdot S.$$

**4.** (11.005) Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен 90°. Найти отношение площади боковой поверхности к площади основания.

Решение. Так как пирамида правильная, то $\frac{S}{S_6} = \cos x$, где за $x$ принята величина угла $OKD$ (рис. 61). Обозначим $|AD| = l$; из прямоугольного треугольника $ADB$ ($|AD| = |DB|$, $\widehat{ADB} = 90°$) находим $|AB| = l\sqrt{2}$. Треугольник $ABC$ — равносторонний, следовательно, $|AK| = |AB| \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{2}\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$, тогда

$$|OK| = \frac{1}{3}|AK| = \frac{l\sqrt{3}}{3\sqrt{2}}.$$

Поскольку $\widehat{DBK} = \widehat{KDB} = 45°$, то $|DK| = |BK| = \frac{l\sqrt{2}}{2}$.

Далее имеем $\cos x = \frac{|OK|}{|DK|} = \frac{l\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} : \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, тогда

$$\frac{S_б}{S} = \frac{1}{\cos x} = \sqrt{3}.$$

**5.** Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно $a$ и наклонено к плоскости основания под углом $\beta$. Найти площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

**6.** (11.006) Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна 13 см, а диагонали его боковых граней равны $4\sqrt{10}$ и $3\sqrt{17}$ см. Определить объем параллелепипеда.

**7.** (11.016) Основание четырехугольной пирамиды — прямоугольник с диагональю, равной $d$ и углом $\alpha$ между диагоналями. Каждое из боковых ребер образует с плоскостью основания угол $\beta$. Найти объем пирамиды.

**8.** (11.018) Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами, равными $a$, $a$ и $b$. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Определить объем пирамиды.

**9.** (11.021) Каждое из боковых ребер пирамиды равно $\frac{269}{32}$ см. Основание пирамиды — треугольник со сторонами 13, 14 и 15 см. Найти объем пирамиды.

**10.** (11.028) Основанием пирамиды служит ромб с острым углом $\alpha$. Боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Определить объем и площадь полной поверхности, если радиус вписанного в ромб круга равен $r$.

**11.** (11.011) Основанием правильной пирамиды служит многоугольник, сумма внутренних углов которого равна 720°. Определить объем пирамиды, если боковое ребро равно $l$ и составляет с высотой пирамиды угол $\alpha$.

Решение. Сумма внутренних углов $n$-угольника равна $\pi(n-2) = 4\pi$ (по условию), отсюда находим $n = 6$. Таким образом, в основании пирамиды — шестиугольник. Из треугольника $OCD$ (рис. 62) находим $|OC| = l\sin\alpha$, $H = |DO| = l\cos\alpha$. Тогда

$$|BC| = |OC| = l\sin\alpha, \quad S = 6S_{\triangle BOC} = 6\frac{|BC|^2\sqrt{3}}{4} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}(l\sin\alpha)^2.$$

Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} (l \sin \alpha)^2 l \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} l^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha.$$

**12.** (11.025) Боковые ребра правильной усеченной треугольной пирамиды наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти объем усеченной пирамиды, если стороны ее оснований равны $a$ и $b$ $(a > b)$.

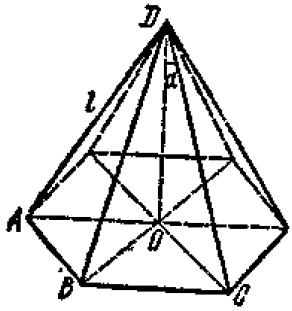



Рис. 62

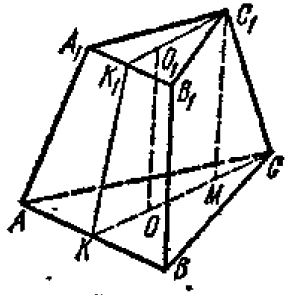



Рис. 63

**Решение.** Рассмотрим сечение пирамиды $K_1C_1CK$ (рис. 63), которое проходит через высоту $O_1O$. Так как треугольники $A_1B_1C_1$ и $ABC$ правильные, то

$$|K_1C_1| = \frac{b\sqrt{3}}{2}, \quad |KC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad |O_1C_1| = \frac{2}{3}|K_1C_1| = \frac{b\sqrt{3}}{3},$$

$$|OC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad |MC| = |OC| - |O_1C_1| = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3}.$$

Площади нижнего и верхнего оснований усеченной пирамиды соответственно равны

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}.$$

Из треугольника $C_1MC$ находим высоту

$$H = |C_1M| = |MC| \operatorname{tg} \alpha = \frac{(a-b)\sqrt{3}}{3} \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a-b)\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{3}} \left( \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \right.$$

$$\left. + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab\sqrt{3}}{4} \right) = \frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{12}.$$

**13.** В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник со сторонами $a$, $a$ и $b$. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания равные двугранные углы $\beta$. Определить объем пирамиды.

Решение. Поскольку боковые грани одинаково наклонены к плоскости основания, то точка $O$ — центр окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 64).

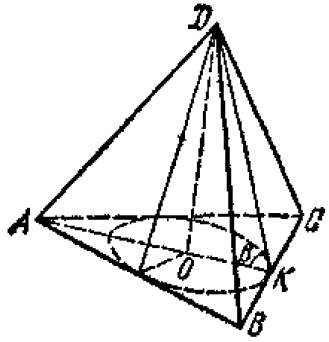



Рис. 64

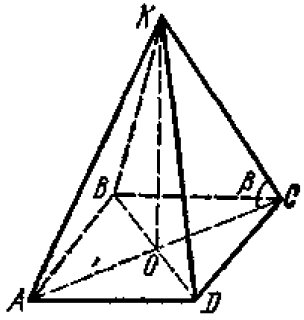



Рис. 65

Находим радиус вписанной окружности $|OK| = r$. Имеем

$$r = \frac{S}{p},$$

где $S$ — площадь $\triangle ABC$, $p$ — его полупериметр. Далее

$$p = \frac{2a+b}{2},\quad h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2},\quad S = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}b\sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}}.$$

*Тогда*

$$r = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}}{2(2a+b)},\quad H = |DO| = r\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sqrt{4a^2-b^2}\operatorname{tg}\beta}{2(2a+b)}.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H = \frac{1}{24}b^2(2a-b)\operatorname{tg}\beta.$$

**14.** (11.027) Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол $\beta$, а площадь диагонального сечения равна $S_1$.

Решение. По условию задачи $S_{\triangle AKC} = S_1$, $\widehat{KCO} = \beta$ (рис. 65). Чтобы определить объем пирамиды, необходимо знать сторону основания и высоту. Обозначим $|AD| = x$

и выразим данную площадь диагонального сечения через $x$ и угол $\beta$. Получим

$$|AC| = x\sqrt{2}, \quad |OC| = \frac{x\sqrt{2}}{2}, \quad H = |KO| = \frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta,$$

тогда

$$S_1 = \frac{1}{2}|AC| \cdot |KO| = \frac{1}{2}x\sqrt{2} \cdot \frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{x^2}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

Отсюда

$$\left(x^2 = \frac{2S_1}{\operatorname{tg}\beta} = 2S_1 \operatorname{ctg}\beta\right) \Rightarrow (x = \sqrt{2S_1 \operatorname{ctg}\beta}).$$

Далее

$$S = x^2 = 2S_1 \operatorname{ctg}\beta; \quad H = \frac{x\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{2}\sqrt{2S_1 \operatorname{ctg}\beta}\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta = \sqrt{S_1 \operatorname{ctg}\beta}\operatorname{tg}\beta.$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{3}2S_1 \operatorname{ctg}\beta \operatorname{tg}\beta \sqrt{S_1 \operatorname{ctg}\beta} = \frac{2}{3}S_1\sqrt{S_1 \operatorname{ctg}\beta}.$$

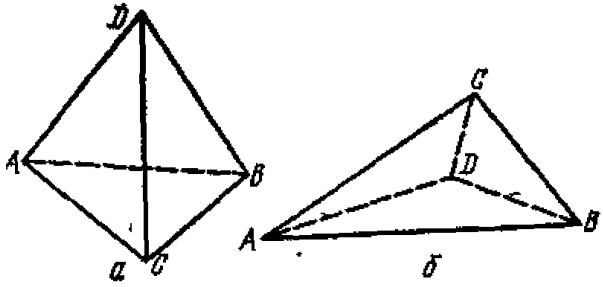



Рис. 66

**15.** (11.033) В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и соответственно равны $\sqrt{70}$, $\sqrt{99}$, $\sqrt{126}$. Определить объем и площадь основания пирамиды.

Решение. Грань $ADC$ — прямоугольный треугольник с катетами $|AD| = \sqrt{70}$; $|DC| = \sqrt{99}$ (рис. 66, *а*). По теореме Пифагора находим $|AC| = \sqrt{70 + 99} = 13$. Аналогично получим $|BC| = \sqrt{99 + 126} = 15$, $|AB| =$

$= \sqrt{70 + 126} = 14$. Площадь основания определяем по формуле Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, $p = \frac{13+15+14}{2}$,

т. е.

$$S = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84.$$

Чтобы определить объем, повернем пирамиду так, чтобы грань $ADB$ стала основанием (рис. 66, *б*), а ребро $[CD]$ — высотой. Тогда

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ADB} \cdot |CD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} |AD| \cdot |DB| \cdot |CD| =$$

$$= \frac{1}{6} \sqrt{70} \sqrt{99} \sqrt{126} = 21\sqrt{55}.$$

**16.** (11.024) Основаниями правильной усеченной пирамиды служат квадраты со сторонами $a$ и $b$ $(a > b)$. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом $\beta$. Определить объем усеченной пирамиды.

**17.** (11.030) В основании прямого параллелепипеда лежит параллелограмм со сторонами 1 и 4 см и острым углом 60°. Большая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Определить его объем.

**18.** (11.034) Определить объем правильной шестиугольной призмы, у которой наибольшая диагональ равна $a$, боковые грани — квадраты.

**19.** (11.042) Определить объем правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее диагональ равна 18 см, а длины сторон оснований 14 и 10 см.

**20.** (11.043) Основанием прямого параллелепипеда служит ромб, площадь которого равна $Q$. Площади диагональных сечений равны $P$ и $S$. Определить объем параллелепипеда.

**21.** (11.054) Каждое из боковых ребер пирамиды равно $l$. Ее основанием служит прямоугольный треугольник, катеты которого относятся как $m:n$, а гипотенуза равна $c$. Вычислить объем пирамиды.

**22.** (11.065) Найти боковую поверхность правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при ее вершине равен 90°, а площадь основания равна $Q$.

**23.** (11.077) Выразить объем конуса через площадь боковой поверхности $S$ и расстояние $r$ от центра основания до образующей.

Решение. Обозначим $|OB| = x$, $|OC| = H$, $|BC| = l$, $|OK| = r$ (рис. 67), тогда $V = \frac{1}{3}\pi x^2 H$; $S = \pi x l$. Выполним преобразования: $V = \frac{1}{3}\pi x \cdot xH$. Так как $\frac{1}{2}xH = \frac{1}{2}rl$ (из равенства площадей треугольника $COB$), то

$$V = \frac{1}{3}\pi x r l = \frac{1}{3} r \pi x l = \frac{1}{3} rS.$$

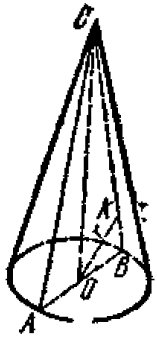



Рис. 67

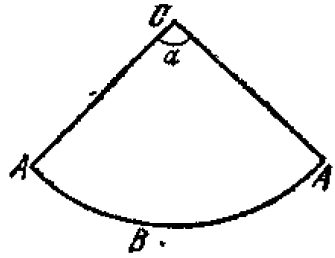



Рис. 68

**24.** (11.089) Радиус основания конуса равен $R$, а угол при вершине в развертке его боковой поверхности равен $\alpha$. Найти объем конуса.

Решение. Обозначим $|AC| = l$, тогда длина дуги $ABA$ в развертке боковой поверхности конуса равна $l\alpha$ (рис. 68). Кроме того, она равна длине окружности $2\pi R$. Получаем уравнение $2\pi R = l\alpha$, откуда $l = \frac{2\pi R}{\alpha}$. Из треугольника $COB$ (см. рис. 67) находим

$$H = |OC| = \sqrt{l^2 - R^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi R}{\alpha}\right)^2 - R^2} = R\sqrt{\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 - 1}.$$

Далее имеем

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H = \frac{1}{3}\pi R^3 \sqrt{\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 - 1}.$$

**25.** (11.114) В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания равны 27, 29 и 52 м, а периметр другого основания равен 72 м. Найти объем усеченной пирамиды.

Решение. Объем усеченной пирамиды определяем по формуле:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Обозначим $H = 10$ м, $P_2 = 72$ м, и так как нам известны все стороны одного из оснований пирамиды, то периметр этого основания $P_1 = 27 + 29 + 52 = 108$ м, а полупериметр $p_1 = 54$ м.

По формуле Герона

$$S_1 = \sqrt{54 \cdot 27 \cdot 25 \cdot 2} = 270 \text{ м}^2.$$

Чтобы найти $S_2$, используем отношение площадей подобных фигур:

$$\left(\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^2\right) \Rightarrow \left(\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{72}{108}\right)^2\right) \Rightarrow \left(\frac{S_2}{S_1} = \frac{4}{9}\right),$$

откуда $S_2 = \frac{4}{9} S_1 = \frac{4}{9} \cdot 270 = 120$. Тогда

$$V = \frac{1}{3} \cdot 10 (270 + 120 + \sqrt{270 \cdot 120}) = \frac{10}{3} \cdot 570 = 1900 \text{ м}^3.$$

26. Три шара радиуса $R$ лежат на плоскости, попарно касаясь друг друга. Определить кратчайшее расстояние от плоскости до поверхности четвертого шара радиуса $R$, который лежит на трех первых шарах, касаясь каждого из них.

Решение. Соединим центры всех шаров пунктирными линиями, получим правильную пирамиду, у которой все ребра равны $2R$ (рис. 69). Поскольку расстояние от плоскости до треугольника $ABC$ равно $R$, то искомое расстояние равно высоте пирамиды $ABCD$;

$$H = \sqrt{|AD|^2 - |AO|^2},$$

где $|AO| = \frac{2}{3}|AN| = \frac{2}{3} R\sqrt{3}$. Далее получаем

$$H = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 2R\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

27. (12.228) В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен $\alpha$, площадь боковой поверхности равна $S$. Определить расстояние от центра основания до боковой грани.

Решение. Обозначим искомое расстояние $|OM| = x$, $\widehat{MKO} = \alpha$ (рис. 70). Из треугольника $KOM$ находим $|OK| = \frac{x}{\sin\alpha}$; тогда

$$|KC| = 3|OK| = \frac{3x}{\sin\alpha}, \quad |AB| = \frac{2|KC|}{\sqrt{3}} = \frac{6x}{\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

Из треугольника $KDO$ находим

$$|KD| = \frac{|OK|}{\cos\alpha} = \frac{2x}{\sin 2\alpha}.$$

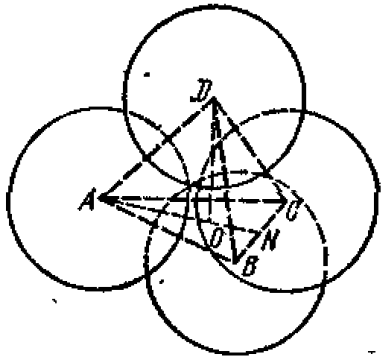


Рис. 69

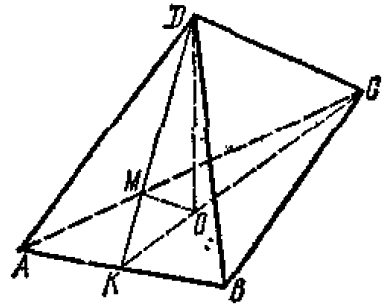


Рис. 70

Тогда

$$S_б = \frac{1}{2} P \cdot |KD| = \frac{1}{2} \cdot \frac{18x}{\sqrt{3}\sin\alpha} \cdot \frac{2x}{\sin 2\alpha} = \frac{18x^2}{\sqrt{3}\sin\alpha\sin 2\alpha}.$$

Решая уравнение $\frac{18x^2}{\sqrt{3}\sin\alpha\sin 2\alpha} = S$, находим

$$x = \sqrt{\frac{S\sqrt{3}\sin\alpha\sin 2\alpha}{18}}.$$

28. (11.120) Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в три раза больше площади основания. Площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга. Найти объем пирамиды.

29. (11.129) Высота правильной усеченной четырехугольной пирамиды равна 3 см, объем ее 38 см$^3$, а площади оснований относятся как 4 : 9. Определить площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

30. В основании четырехугольной пирамиды лежит прямоугольник, площадь которого равна $S$; боковые ребра

пирамиды конгруэнтны и образуют с плоскостью основания угол $\alpha$. Угол между диагоналями основания равен $\beta$. Найти объем пирамиды.

31. (11.133) Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной, равной $a$. Одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Определить площадь полной поверхности этой пирамиды.

32. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной $c$, и острым углом $\alpha$. Через гипотенузу нижнего основания и вершину прямого

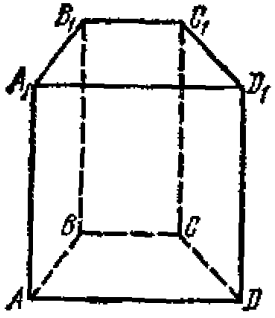


Рис. 71

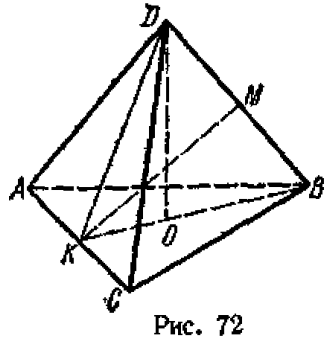


Рис. 72

угла верхнего основания проведена плоскость, образующая с плоскостью основания угол $\beta$. Определить объем треугольной пирамиды, отсеченной от призмы плоскостью.

33. (11.145) Боковые грани треугольной пирамиды взаимно перпендикулярны, а площади их равны $a^2$, $b^2$ и $c^2$. Определить объем пирамиды.

34. (11.115) В основании призмы лежит трапеция. Найти объем призмы, если площади параллельных боковых граней равны $S_1$ и $S_2$, а расстояние между ними равно $h$.

Решение. Объем призмы находим по формуле

$$V = S \cdot H,$$

где $S = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|) \cdot h$ — площадь основания, $H$ — высота призмы (рис. 71). Тогда $V = \frac{1}{2}(|AD| + |BC|)h \cdot H = \frac{1}{2}h(|AD|H + |BC|H)$; так как $S_1 = |AD|H$, $S_2 = |BC|H$, то

$$V = \frac{1}{2}h(S_1 + S_2).$$

35. (11.140) Найти объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен $\alpha$, а расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно $d$.

Решение. По условию задачи $[KM] \perp [BD]$, $|KM|=d$, $\widehat{ADC}=\alpha$ (рис. 72). Чтобы определить объем, необходимо знать сторону основания, поэтому обозначим $|AC|=x$, тогда $|BK|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Рассмотрим треугольник $DKB$. Площадь его можно определить двумя способами:

$$S_{\triangle DKB}=\frac{1}{2}|KM|\cdot|DB|,\ S_{\triangle DKB}=\frac{1}{2}|DO|\cdot|BK|,$$

откуда получим

$$|KM|\cdot|DB|=|DO|\cdot|BK|. \qquad (1)$$

Из треугольника $DKC$ находим $|DC|=\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$. Из треугольника $DBO$ находим $|DO|$, учитывая, что $|OB|=\frac{x\sqrt{3}}{3}$, $|DB|=|DC|$:

$$|DO|=\sqrt{\left(\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2-\left(\frac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Из уравнения (1) находим

$$\left(|KM|=\frac{|DO|\cdot|BK|}{|DB|}\right)\Rightarrow\left(d=\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}\right),$$

откуда

$$x=\frac{2d}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

Далее определяем площадь основания и высоту $DO$:

$$S=\frac{x^2\sqrt{3}}{4},\ |DO|=\frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}.$$

Окончательно имеем

$$\left(V=\frac{1}{3}\frac{x^2\sqrt{3}}{4}|DO|=\frac{x^3}{24\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(V=\frac{d^3}{3\sin\frac{\alpha}{2}\left(3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}\right).$$

**36.** (11.153) В треугольной усеченной пирамиде через сторону верхнего основания проведена плоскость параллельно противоположному боковому ребру. В каком отношении разделится объем усеченной пирамиды, если соответственные стороны оснований относятся, как 1 : 2?

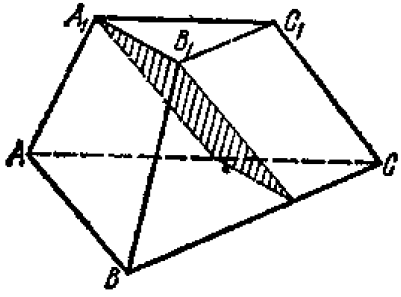


Рис. 73

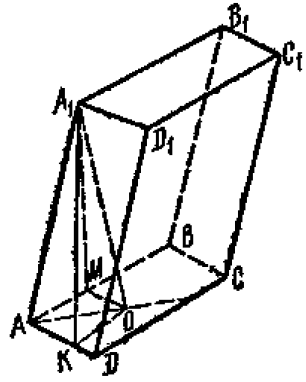


Рис. 74

Решение. Объем усеченной пирамиды $V=\frac{1}{3}H(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2})$. Поскольку площади оснований относятся, как квадраты сторон, то (рис. 73)

$$\left(\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right)\Rightarrow(S_1=4S_2).$$

Тогда

$$V=\frac{1}{3}H(S_2+4S_2+\sqrt{4S_2^2})=\frac{1}{3}H\cdot 7S_2.$$

Сечение отсекает от пирамиды призму, объем которой равен $V_1=HS_2$. Следовательно, объем оставшейся части равен $V_2=V-V_1=\frac{7}{3}HS_2-HS_2=\frac{4}{3}HS_2$. Далее находим отношение

$$V_2:V_1=4:3.$$

**37.** (11.166) Длины ребер параллелепипеда равны $a$, $b$, $c$. Ребра длиной $a$ и $b$ взаимно перпендикулярны, а ребро длины $c$ образует с каждым из них угол $\alpha$. Определить объем параллелепипеда.

Решение. Исследуем, в какую точку проектируется высота $[A_1O]$ параллелепипеда (рис. 74). Для этого рассмотрим треугольники $AA_1K$ и $AA_1M$ ($[A_1K] \perp [AD]$, $[A_1M] \perp [AB]$). Так как $\widehat{A_1AK} = \widehat{A_1AM} = \alpha$ по условию, то $|AM| = |AK|$ (треугольники $A_1AM$ и $A_1AK$ конгруэнтны). Поскольку $[OM] \perp [AB]$, $[OK] \perp [AD]$, то фигура $AMOK$ — прямоугольник. Следовательно, $|AM| = |OK|$, $|OM| = |AK|$, но в силу равенства $|AM| = |AK|$ получаем, что $AMOK$ — квадрат. Следовательно, $[AO]$ — биссектриса $< MAK$. Далее находим

$$|AK| = c\cos\alpha,\ |AO| = |AK|\sqrt{2} = c\sqrt{2}\cos\alpha,$$

$$|A_1O| = \sqrt{c^2 - |AO|^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2\cos^2\alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}$$

(задача имеет смысл при условии $2\alpha > 90°$, т. е. $\alpha > 45°$). Итак,

$$V = ab|A_1O| = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

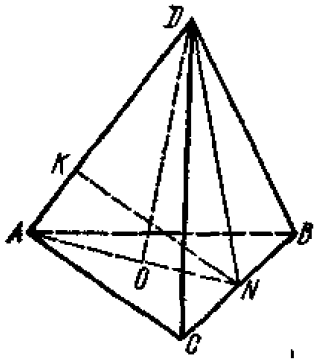


Рис. 75

**38.** (11.213) Вычислить объем треугольной пирамиды, у которой два противоположных ребра равны 4 и 12 м, а каждое из остальных ребер равно 7 м.

Решение. Обозначим $|BC| = 4$ м, $|DA| = 12$ м, $|CD| = |DB| = |AC| = |BA| = 7$ м. Объем пирамиды определяем по формуле $V = \frac{1}{3}S_{\triangle ABC} \cdot |DO|$ (рис. 75). Очевидно, высота пирамиды $DO$ будет высотой треугольника $DNA$. Площадь основания пирамиды

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AN| \cdot |BC|.$$

Из треугольника $ABC$ находим

$$|AN| = \sqrt{|AC|^2 - |CN|^2} = 3\sqrt{5}.$$

Тогда

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4 = 6\sqrt{5}\ \text{м}^2.$$

Чтобы найти высоту пирамиды $DO$, рассмотрим треугольник $DNA$ и определим его площадь двумя способами:

$$S_{\triangle DNA} = \frac{1}{3}|AN| \cdot |DO|; \quad S_{\triangle DNA} = \frac{1}{2}|KN| \cdot |DA|,$$

где $[KN] \perp [DA]$. Отсюда

$$(|AN| \cdot |DO| = |KN| \cdot |DA|) \Rightarrow \left(|DO| = \frac{|KN| \cdot |DA|}{|AN|}\right).$$

Поскольку треугольники $CDB$ и $ABC$ конгруэнтны, то $|ND| = |AN|$. Следовательно, треугольник $NDA$ равнобедренный. Отсюда

$$|DK| = |AK| = 6; \quad |KN| = \sqrt{|AN|^2 - |KA|^2} = 3;$$
$$|DO| = \frac{|KN| \cdot |DA|}{|AN|} = \frac{12}{\sqrt{5}}.$$

Далее находим

$$V = \frac{1}{3} S_{\triangle ABC} \cdot |DO| = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{5} \cdot \frac{12}{\sqrt{5}} = 24 \text{ м}^3.$$

**39.** (11.106) Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $a$. Вычислить объем этой пирамиды, если известно, что ее боковая поверхность в десять раз больше площади основания.

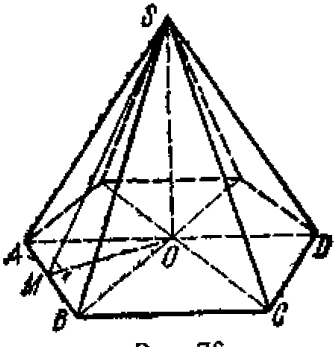


Рис. 76

Решение. Обозначим $\widehat{SMO} = x$, тогда $\cos x = S : S_6 = 0{,}1$ (рис. 76). Так как пирамида правильная, то треугольник $ABO$ равносторонний: $|AB| = a$, $|MO| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$; $H = |MO| \operatorname{tg} x$. Поскольку $\cos x = 0{,}1$, то $\sin x = \sqrt{1 - 0{,}01} = \sqrt{0{,}99}$, $\operatorname{tg} x = 10\sqrt{0{,}99} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}$. Следовательно,

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot 3\sqrt{11} = \frac{9}{4} a^3 \sqrt{11}.$$

**40.** (11.169) Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение площади боковой поверхности

пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

41. (11.171) В полушар радиуса $R$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить объем куба.

42. (11.180) Определить объем шарового сектора, если площадь ограничивающей его конической поверхности равна $Q$, а площадь поверхности сферического сегмента равна $S$.

43. (11.190) Радиус основания конуса равен $r$. Две взаимно перпендикулярные образующие делят площадь боковой поверхности конуса на части в отношении 1 : 2. Найти объем конуса.

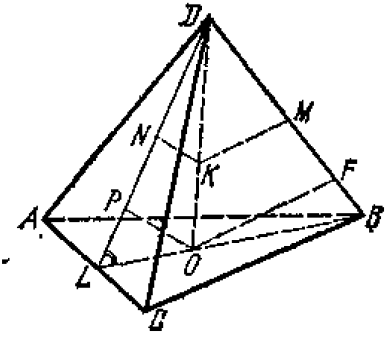


Рис. 77

44. (11.162) В треугольной пирамиде все четыре грани — конгруэнтные равнобедренные треугольники с основанием, равным $a$, и боковой стороной, равной $b$. Вычислить объем пирамиды. При каких $a$ и $b$ задача имеет решение?

45. (11.161) В треугольной пирамиде две боковые грани взаимно перпендикулярны. Площади этих граней равны $S$ и $P$, а длина их общего ребра равна $a$. Определить объем пирамиды.

46. (11.201) Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны $l$. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два содержат по 45°, а третий — 60°. Определить объем пирамиды.

47. (11.170) Из середины высоты правильной треугольной пирамиды опущены перпендикуляры на боковое ребро и на боковую грань, равные соответственно $p$ и $q$. Найти объем пирамиды.

Решение. Пусть $|KM| = p$, $|KN| = q$ (рис. 77). Найдем высоту и площадь основания пирамиды. Из точки $O$ проведем

$$[OF] \parallel [KM], \quad [OP] \parallel [KN].$$

Тогда $|OF| = 2p$, $|OP| = 2q$ (так как $[KM]$ и $[KN]$ — средние линии треугольников $ODF$ и $ODP$ соответственно).

Обозначим $\widehat{PLO} = x$. Из треугольников $PLO$, $DLO$, $ODB$ находим

$$|OL| = \frac{2q}{\sin x}; \quad |OD| = |OL| \operatorname{tg} x = \frac{2q}{\cos x};$$

$$|LD| = \frac{|OL|}{\cos x} = \frac{2q}{\sin x \cos x}; \quad |OB| = 2|OL| = \frac{4q}{\sin x};$$

$$|DB| = \sqrt{|OD|^2 + |OB|^2} = \frac{2q}{\sin x \cos x}\sqrt{\sin^2 x + 4\cos^2 x}.$$

Площадь треугольника $DOB$ вычислим двумя способами:

$$S_{\triangle DOB} = \frac{1}{2}|OD| \cdot |OB|, \quad S_{\triangle DOB} = \frac{1}{2}|DB| \cdot |OF|,$$

отсюда получим

$$(|OD| \cdot |OB| = |DB| \cdot |OF|) \Rightarrow \left(\frac{2q \cdot 4q}{\cos x \sin x} = \right.$$

$$\left. = 2p \cdot \frac{2q\sqrt{\sin^2 x + 4\cos^2 x}}{\sin x \cos x}\right) \Rightarrow \left(\frac{2q}{p} = \sqrt{1 + 3\cos^2 x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{4q^2}{p^2} = 1 + 3\cos^2 x\right),$$

откуда

$$\cos x = \sqrt{\frac{4q^2 - p^2}{3p^2}}, \quad \sin x = \frac{2\sqrt{p^2 - q^2}}{p\sqrt{3}}.$$

Поскольку $|BL| = 3|OL| = \frac{6q}{\sin x}$, то $|AC| = \frac{2}{\sqrt{3}}|BL| =$

$= \frac{12q}{\sqrt{3}\sin x}$ и

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BL| = \frac{1}{2} \cdot \frac{12q}{\sqrt{3}\sin x} \cdot \frac{6q}{\sin x} = \frac{3\sqrt{3}p^2q^2}{p^2 - q^2};$$

$$V = \frac{18p^3q^3}{(p^2 - q^2)\sqrt{4q^2 - p^2}}.$$

48. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой боковые стороны и меньшее основание равны $a$, а острые углы равны $\varphi$; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания одинаковые углы $\beta$. Найти объем пирамиды.

Решение. Чтобы определить объем пирамиды, нужно вычислить площадь основания и высоту $SO$ (рис. 78, $a$). В трапеции $ACDB$ известны $|AC| = |CD| = |DB| = a$,

$\widehat{CAB} = \widehat{DBA} = \varphi$ (рис. 78, *б*). Площадь основания $S = \frac{1}{2}(|AB| + |CD|)|CK|$. Далее находим

$$|CK| = a\sin\varphi, \quad |AK| = a\cos\varphi, \quad |AB| = |KM| + 2|AK| = a(1 + 2\cos\varphi).$$

Тогда

$$S = a^2(1 + \cos\varphi)\sin\varphi.$$

Высоту $SO$ можно найти из треугольника $SOC$, где $\widehat{SCO} = \beta$, но для этого необходимо знать $|CO|$ — радиус опи-

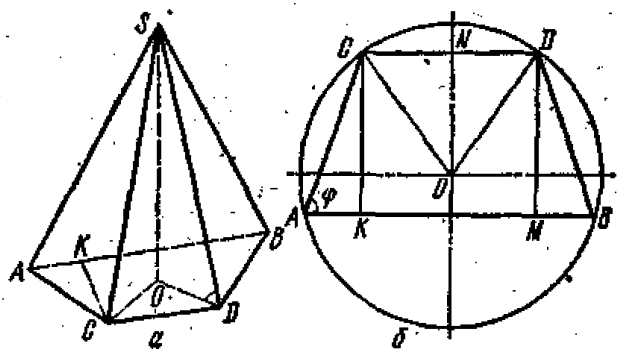



Рис. 78

санной окружности. Рассмотрим треугольник $COD$. Величина угла $COD$ измеряется дугой $CD$; так как $|CD| = |DB|$, то величина дуги $CDB$ равна $2\varphi$, следовательно, величина дуги $CD$ равна $\varphi$ и $\widehat{COD} = \varphi$. Из треугольника $CON$, учитывая, что $\widehat{CON} = \frac{\varphi}{2}$, находим

$$R = |CO| = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Тогда

$$H = R\operatorname{tg}\beta = \frac{a}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\operatorname{tg}\beta,$$

$$V = \frac{1}{3}S \cdot H = \frac{2}{3}a^3\cos^3\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}\beta.$$

**49.** В правильной $n$-угольной пирамиде сторона основания равна $2a$ и двугранный угол при боковом ребре равен $2\alpha$. Определить объем пирамиды.

Р е ш е н и е. На рис. 79, *а* изображена часть $n$-угольной пирамиды: $[SO]$ — высота пирамиды, $SAB$ и $SBC$ — боковые грани, $|AB| = |BC| = 2a$, $\widehat{AKC} = 2a$. Поскольку в основании пирамиды правильный $n$-угольник, то $\widehat{AOB} = \frac{2\pi}{n}$ (рис. 79, *б*). Так как $V = \frac{1}{3} S \cdot H$, то задача сводится к определению площади $n$-угольника и высоты. Имеем

$$S = n \cdot S'_{\triangle AOB} = \frac{n}{2} \cdot 2a|ON|.$$

Из треугольника $AON$ находим $|ON| = a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}$, $|AO| = \frac{a}{\sin \frac{\pi}{n}}$, а затем получим

$$S = na \cdot a \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = na^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}.$$

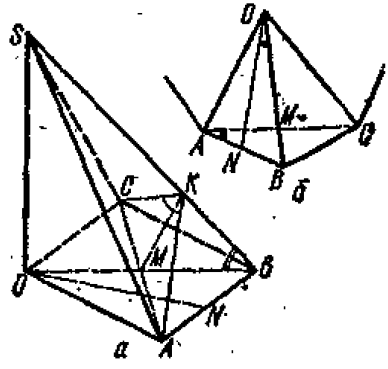


Рис. 79

Треугольники $SOB$ и $KMB$ подобны, так как оба они прямоугольные и содержат общий угол $B$. Для нахождения высоты используем подобие этих треугольников. Имеем $\frac{|SO|}{|OB|} = \frac{|KM|}{|KB|}$, откуда $|SO| = \frac{|KM| \cdot |OB|}{|KB|}$. Рассматриваем треугольники $AMB$, $AMK$ и $KMB$, получаем

$$\widehat{MAB} = \widehat{NOB} = \frac{\pi}{n}, \quad |AM| = 2a \cos \frac{\pi}{n}, \quad |MB| = 2a \sin \frac{\pi}{n},$$

$$|KM| = |AM| \operatorname{ctg} \alpha = 2a \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$|KB| = \sqrt{\left(2a \sin \frac{\pi}{n}\right)^2 - \left(2a \cos \frac{\pi}{n} \operatorname{ctg} \alpha\right)^2} =$$

$$= \frac{2a}{\sin \alpha} \sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n} + \alpha\right) \cos\left(\frac{\pi}{n} - \alpha\right)}.$$

Тогда высота пирамиды

$$H = |SO| = \frac{|KM| \cdot |OB|}{|KB|} =$$

$$= \frac{2a\cos\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\alpha\cdot\frac{a}{\sin\frac{\pi}{n}}}{\frac{2a}{\sin\alpha}\sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}} =$$

$$= \frac{a\cos\alpha\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}}{\sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}},$$

а объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3}S\cdot H = \frac{na^3\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}{3\sqrt{-\cos\left(\frac{\pi}{n}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{n}-\alpha\right)}}.$$

**50.** Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник с гипотенузой $c$ и острым углом $\alpha$. Боковая грань, проходящая через катет, прилежащий к углу $\alpha$, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани наклонены к основанию под углом $\beta$. Определить объем пирамиды.

**51.** Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник с гипотенузой $c$ и острым углом $\alpha$. Боковая грань, проходящая через гипотенузу, перпендикулярна к плоскости основания, а каждая другая боковая грань образует с плоскостью основания угол $\beta$. Определить объем и площадь полной поверхности этой пирамиды.

**52.** (11. 134) Правильная треугольная пирамида рассечена плоскостью, перпендикулярной к основанию и делящей две стороны основания пополам. Определить объем отсеченной пирамиды, если сторона основания первоначальной пирамиды равна $a$ и двугранный угол при основании равен $\varphi$.

**53.** (11. 146) Основанием пирамиды служит правильный шестиугольник со стороной, равной $a$. Одно из боковых ребер перпендикулярно к плоскости основания и конгруэнтно стороне основания. Определить площадь полной поверхности этой пирамиды.

**54.** (11. 157) В правильной усеченной четырехугольной пирамиде стороны оснований равны $a$ и $b$, а площадь боковой поверхности равна половине площади полной поверхности. Найти объем пирамиды.

55. (11. 167) Основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм с углом в 120° и сторонами, равными 3 и 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда конгруэнтна большей диагонали основания. Определить объем параллелепипеда.

56. Основанием пирамиды служит прямоугольник, площадь которого равна $S$. Две боковые грани перпендикулярны к плоскости основания, а две другие наклонены к ней под углами $\alpha$ и $\beta$. Найти объем пирамиды.

57. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна $a$, угол между боковыми сторонами равен $\alpha$. Найти объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна $S$.

58. Шар касается всех 12 ребер куба. Вычислить отношение объема той части шара, которая находится внутри куба, к объему куба.

59. (12 264) Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды относятся как $m:n$ $(m > n)$. Высота пирамиды равна $H$. Боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

60. (12. 265) Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p:q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстоянии, равном $a$, и составляет с высотой конуса угол, равный $\alpha$. Найти объем конуса.

61. (12. 273) Точка $A$ лежит на окружности верхнего основания цилиндра, точка $B$ на окружности нижнего основания. Прямая $AB$ составляет с плоскостью основания угол, равный $\alpha$, а с плоскостью осевого сечения, проведенного через точку $B$, угол, равный $\beta$. Найти объем цилиндра, если $|AB| = l$.

62. (12. 330) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен $r$, а острый угол равен $\alpha$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания один и тот же угол, равный $\beta$. Определить объем пирамиды.

63. (12. 332) В основание шарового сегмента вписан прямоугольный треугольник, у которого площадь равна $S$, а острый угол равен $\alpha$. Найти высоту сегмента, если его дуге в осевом сечении соответствует центральный угол, равный $\beta$.

64. (12. 345) Объем правильной пирамиды равен $V$. Определить объем пирамиды, отсекаемой от данной пира-

миды плоскостью, проходящей через центр шара, вписанного в данную пирамиду, параллельно ее основанию, если величина двугранного угла при основании равна $\alpha$.

**65.** (12. 384) Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза равна $c$, а меньший из острых углов равен $\alpha$. Наибольшее боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный $\beta$. Определить объем пирамиды, зная, что ее высота проходит через точку пересечения медиан основания.

**66.** (12. 462) Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом, равным $\alpha$. Трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса и ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти объем пирамиды, если образующая конуса равна $l$ и составляет с его высотой угол, равный $\beta$.

**67.** Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, боковое ребро которой равно $l$, а величина двугранного угла между смежными боковыми гранями равна $\beta$.

**68.** В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб, сторона которого равна $a$ и острый угол равен $\alpha$. Плоскости, проходящие через вершину пирамиды и диагонали основания, наклонены к плоскости основания под углами $\varphi$ и $f$. Определить объем пирамиды, если основание высоты находится на стороне ромба.

**69.** (11. 120) Площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды в $k$ раз больше площади основания. Найти объем пирамиды, если площадь круга, вписанного в основание, численно равна радиусу этого круга.

**70.** (11. 136) Через одно ребро основания правильной треугольной пирамиды со стороной основания $q$ проведена плоскость перпендикулярно к противоположному ребру. Определить площадь полной поверхности пирамиды, если указанная плоскость делит боковое ребро в отношении $m:n$.

### § 3. Тела вращения

При решении задач на тела вращения необходимо учитывать следующее: площадь поверхности тела вращения равна сумме площадей поверхностей, образованных при вращении каждой стороны вращаемой фигуры. Приведем решение нескольких задач.

71. В треугольнике даны основание $a$ и прилежащие углы $\alpha$, $\frac{\pi}{2}+\alpha$. Определить объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении этого треугольника около его высоты.

Решение. Объем и площадь поверхности тела вращения определяем по формулам $V=V_1-V_2$, $S=S_1+S_2+S_3$, где $V_1$ и $S_1$ — соответственно объем и площадь боковой поверхности конуса $ABA_1$ (рис. 80), $V_2$ и $S_2$ — объем и площадь боковой поверхности конуса $CBC_1$, $S_3=$

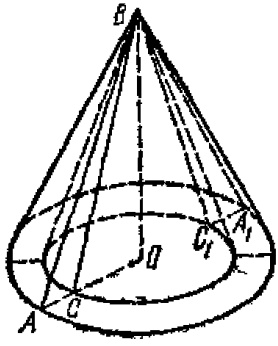


Рис. 80

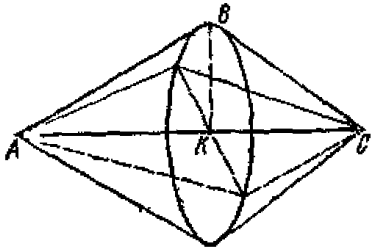


Рис. 81

$=\pi(|AO|^2-|CO|^2)$. Обозначим $|CO|=r$, $|AB|=l_1$, $|BC|=l_2$, из треугольника $BCO$ получим $C\widehat{BO}=\alpha$; $|BO|=H=r\operatorname{ctg}\alpha$. Из треугольника $ABO$ находим $H=(a+r)\operatorname{tg}\alpha$. Решая уравнение $r\operatorname{ctg}\alpha=(a+r)\operatorname{tg}\alpha$, находим

$$r=\frac{a\sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}.$$

Вычисляя $V_1$ и $V_2$, находим

$$V=\frac{\pi}{2}\,a^3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{cosec}\frac{\alpha}{2}.$$

Аналогично получим

$$l_1=\frac{a+r}{\cos\alpha}=\frac{a\cos\alpha}{\cos 2\alpha};\quad l_2=\frac{a\sin\alpha}{\cos 2\alpha};\quad S_3=\frac{\pi a^2}{\cos 2\alpha};$$

$$S_1=\frac{\pi a^2\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos 2\alpha};\quad S_2=\frac{\pi a^2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha};$$

$$S=\frac{\pi a^2}{\cos 2\alpha}(1+\sin\alpha\cos\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)).$$

**72.** Треугольник со сторонами, равными $a$, $b$, $c$, вращается поочередно около каждой из своих сторон. Найти отношение объемов полученных при этом тел.

Решение. Обозначим $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$ (рис. 81) $|BK| = h_b$ (высота, опущенная на сторону $b$), $V_a$ — объем тела, полученного при вращении вокруг стороны $a$, $V_b$ — вокруг $b$, $V_c$ — вокруг $c$. Имеем

$$V_b = \frac{1}{3}\pi h_b^2 |CK| + \frac{1}{3}\pi h_b^2 |AK| = \frac{1}{3}\pi h_b^2 b.$$

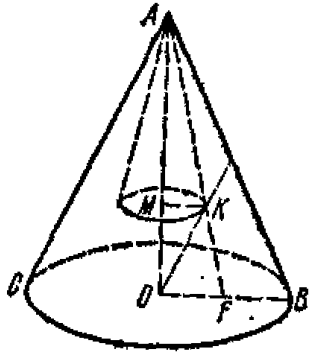


Рис. 82

Аналогично

$$V_a = \frac{1}{3}\pi h_a^2 a, \quad V_c = \frac{1}{3}\pi h_c^2 c,$$

где $h_a$ и $h_c$ — высоты, опущенные на соответствующие стороны $a$ и $c$. Площадь треугольника $ABC$ можно вычислить тремя различными способами

$$S = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c.$$

Преобразуем полученные объемы

$$V_a = \frac{1}{3}\pi\frac{(h_a a)^2}{a} = \frac{1}{3}\pi\frac{(2S)^2}{a}; \quad V_b = \frac{1}{3}\pi\frac{(2S)^2}{b};$$

$$V_c = \frac{1}{3}\pi\frac{(2S)^2}{c}.$$

Далее находим отношение объемов

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

**73.** Конус образован вращением прямоугольного треугольника площади $S$ вокруг одного из катетов. Найти объем конуса, если длина окружности, описанной точкой пересечения медиан этого треугольника, равна $L$.

Решение. Дано $S_{\triangle AOB} = S$, и точка $K$ (точка пересечения медиан) описывает окружность длиной $L$ (рис. 82). Следовательно, $|MK| = \frac{L}{2\pi}$. Так как $|AK| = \frac{2}{3}|AF|$, то из подобия треугольников $AMK$ и $AOF$ получим $|MK| = \frac{2}{3}|OF|$. Отсюда $|OF| = \frac{3}{2}|MK| = \frac{3}{2}\cdot\frac{L}{2\pi} = \frac{3L}{4\pi}$. По-

скольку $[AF]$ — медиана, то

$$|OB| = 2|OF| = \frac{3L}{2\pi}.$$

Площадь треугольника $AOB$ равна $S = \frac{1}{2}|AO| \cdot |OB|$, откуда

$$|AO| = \frac{2S}{|OB|} = \frac{2S \cdot 2\pi}{3L} = \frac{4\pi S}{3L}.$$

Объем конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi |OB|^2 \cdot |AO| = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3L}{2\pi}\right)^2 \cdot \frac{4\pi S}{3L} = LS.$$

**74.** Равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона равна $b$, а угол при вершине $\alpha$, вращается около боковой стороны. Найти объем и площадь поверхности тела вращения.

**75.** Ромб со стороной $a$ и острым углом $\alpha$ вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно к его стороне. Определить площадь поверхности и объем тела вращения.

**76.** Определить объем и площадь поверхности тела, полученного при вращении прямоугольника $ABCD$ около оси, проходящей через его вершину $A$ перпендикулярно к диагонали $AC$ ($|AC| = d$), если $\widehat{CAB} = \alpha$.

**77.** Периметр прямоугольного треугольника $2p$, один из острых углов $\alpha$. Определить объем тела, полученного при вращении треугольника около гипотенузы.

**78.** (12.237) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $c$, его острый угол равен $\alpha$. Треугольник вращается вокруг биссектрисы внешнего прямого угла. Найти объем тела вращения.

## § 4. Сечения геометрических тел

**79.** В правильной четырехугольной пирамиде двухгранный угол при ребре основания равен $\alpha$. Через ребро основания проведена плоскость под углом $\beta$ к основанию ($\beta < \alpha$). Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды равно $a$.

Решение. Площадь сечения (трапеция $KMCD$) находим по формуле $S = \frac{1}{2}|EN|(|CD| + |KM|)$ (рис. 83). Из

треугольника $FEN$ с помощью теоремы синусов находим $|EN|$ и $|EF|$:

$$\left(\frac{|EN|}{\sin\alpha}=\frac{|FN|}{\sin(\pi-(\alpha+\beta))}=\frac{|EF|}{\sin\beta}\right)\Rightarrow\left(|EN|=\frac{a\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\ |EF|=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}\right).$$

Из $\triangle PFO$ находим $|PF|=\frac{a}{2\cos\alpha}$, тогда

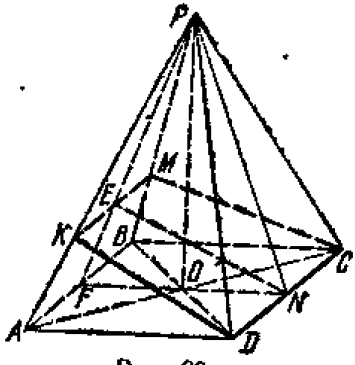


Рис. 83

$$|PE|=|PF|-|EF|=\frac{a}{2\cos\alpha}-\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из подобия треугольников $KPM$ и $APB$ получим

$$\frac{|KM|}{|AB|}=\frac{|PE|}{|PF|},$$

откуда

$$|KM|=\frac{|PE|\cdot|AB|}{|PF|}=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Подставим найденные величины в формулу для площади сечения и, сделав преобразования, получим

$$S=\frac{a^3\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

**80.** Через вершину конуса проведена плоскость, делящая боковую поверхность на две части; если развернуть эти части на плоскости, то получается два сектора с углами $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha>\beta)$. Определить угол при вершине проведенного сечения.

Решение. Обозначим $\widehat{ADB}=x$, $|AD|=l$, $|AO|=r$ (рис. 84, *а*). Длина дуги $AMB$ равна $l\alpha$ (рис. 84, *б*), а длина дуги $ANB$ равна $l\beta$ (рис. 84, *в*). Так как сумма длин дуг $AMB$ и $ANB$ равна длине окружности, то составляем уравнение $2\pi r=l\beta+l\alpha=l(\alpha+\beta)$, откуда $r=\frac{l(\alpha+\beta)}{2\pi}$. Из основания конуса находим

$$\widehat{AOB}=\frac{l\beta}{r}=\frac{2\pi\beta}{\alpha+\beta}.$$

Из треугольников $AOC$ и $ADC$ получаем

$$|AC| = r \sin \frac{\pi\beta}{\alpha+\beta},$$

$$\left(\sin\frac{x}{2} = \frac{|AC|}{l}\right) \Rightarrow \left(\sin\frac{x}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2\pi}\sin\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

Таким образом,

$$x = 2\arcsin\left(\frac{\alpha+\beta}{2\pi}\sin\frac{\pi\beta}{\alpha+\beta}\right).$$

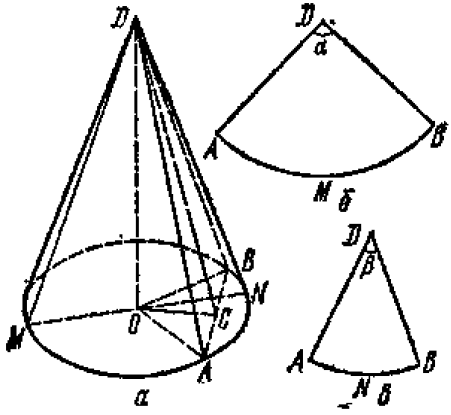



Рис. 84

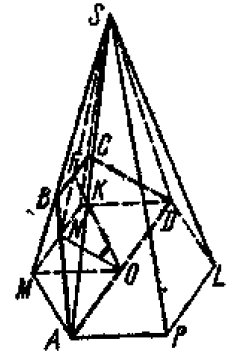



Рис. 85

**81.** В правильной шестиугольной пирамиде проведено сечение через наибольшую диагональ основания, которое образует угол $\beta$ с основанием пирамиды. Найти отношение площади сечения к площади основания, если величина угла при вершине боковой грани пирамиды равна $\alpha$.

Решение. По условию $\widehat{BSC} = \alpha$, $\widehat{FON} = \beta$ (рис. 85). В сечении образовалась трапеция $ABCD$. Обозначим длину стороны шестиугольника через $a$, тогда $|AD| = 2a$, $|ON| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Чтобы определить площадь $ABCD$, необходимо знать $|BC|$ и $|OF|$.

Рассмотрим треугольник $OFN$. Из него можно найти $|OF|$ по теореме синусов, но для этого нужно знать $\widehat{FNO}$. Обозначим ее через $x$, из треугольника $SNM$ найдем $|SN| = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а затем из треугольника $SON$ найдем

$$\cos x = \frac{|ON|}{|SN|} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Запишем теорему синусов для треугольника $OFN$:

$$\left(\frac{|OF|}{\sin x}=\frac{|ON|}{\sin(\beta+x)}=\frac{|FN|}{\sin\beta}\right)\Rightarrow\left(|OF|=\frac{|ON|\sin x}{\sin(\beta+x)}=\right.$$
$$\left.=\frac{a\sqrt{3}\sin x}{2\sin(\beta+x)}\right),$$

где $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

Из подобия треугольников $SBC$ и $SMK$ находим $|BC|$. Имеем

$$\frac{|BC|}{|KM|}=\frac{|SF|}{|SN|},$$

где $|SF|=|SN|-|FN|$. Находим $|FN|$ из треугольника $OFN$ по теореме синусов

$$\left(\frac{|FN|}{\sin\beta}=\frac{|ON|}{\sin(\beta+x)}\right)\Rightarrow\left(|FN|=\frac{a\sqrt{3}\sin\beta}{2\sin(\beta+x)}\right).$$

Тогда

$$|SF|=|SN|-|FN|=\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-\frac{a\sqrt{3}\sin\beta}{2\sin(\beta+x)}=\frac{a\sqrt{3}}{2\cos x}-$$
$$-\frac{a\sqrt{3}\sin\beta}{2\sin(\beta+x)}=\frac{a\sqrt{3}\sin x\cos\beta}{2\sin(\beta+x)\cos x}=$$
$$=\frac{a\sqrt{3}\cos\beta\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin(\beta+x)\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\beta\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin(\beta+x)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Таким образом

$$|BC|=\frac{|KM||SF|}{|SN|}=\frac{a\cdot a\cos\beta\sqrt{1-3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}}{2\sin(\beta+x)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\beta\sin x}{\sin(\beta+x)}.$$

Теперь определим площадь сечения

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}(|BC|+|AD|)|OF|=$$
$$=\left(\frac{a\cos\beta\sin x}{2\sin(\beta+x)}+a\right)\frac{a\sqrt{3}\sin x}{2\sin(\beta+x)}=$$
$$=\frac{a^2\sqrt{3}(\cos\beta\sin^2 x+2\sin(\beta+x)\sin x)}{2\sin^2(\beta+x)}.$$

Площадь основания

$$S = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}.$$

Далее имеем

$$\frac{S_{ABCD}}{S} = \frac{\cos\beta \sin^2 x + 2\sin(\beta + x)\sin x}{3\sin^2(\beta + x)},$$

где $\sin x = \sqrt{1 - 3\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$.

82. Основанием пирамиды $SABCD$ является ромб с диагоналями $|AC| = a$, $|BD| = b$. Боковое ребро $SA$ перпендикулярно к плоскости основания и равно $c$. Через точку $A$ и середину ребра $SC$ проведена плоскость параллельно диагонали основания $BD$. Определить площадь сечения.

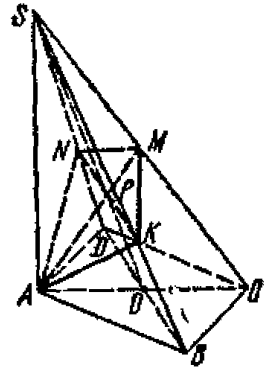


Рис. 86

Решение. Рассмотрим треугольник $CSA$ (рис. 86). Так как $[SO]$ и $[AM]$ — его медианы, то точка их пересечения делит каждую из них в отношении 2:1. Поэтому из подобия треугольников $SNK$ и $SBD$ находим $\frac{|NK|}{|BD|} = \frac{|SP|}{|SO|} = \frac{2}{3}$ и, значит, $|NK| = \frac{2}{3}b$. Из прямоугольного треугольника $SAC$ находим $|AM| = \frac{1}{2}|SC| = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + a^2}$. Поскольку плоскость $ASC \perp [BD]$ и $[NK] \parallel [BD]$, то $ASC \perp [KN]$, следовательно, $[AM] \perp [NK]$. Поэтому

$$S_{сеч} = \frac{1}{2}|AM| \cdot |NK| = \frac{1}{6}b\sqrt{c^2 + a^2}.$$

83. В правильной шестиугольной пирамиде через центр основания проведено сечение параллельно боковой грани. Найти отношение площади сечения к площади боковой грани.

84. Тетраэдр, ребро которого равно $a$, пересечен плоскостью, проходящей через ребро основания и делящей противоположное боковое ребро в отношении 2:1. Определить площадь полученного сечения.

85. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна $a$, угол между боковым ребром и плоскостью основания равен $\beta$. Найти площадь сечения пира-

миды плоскостью, проходящей через вершину основания перпендикулярно к противоположному боковому ребру.

86. (11.169) Через вершину основания и середины двух боковых ребер правильной треугольной пирамиды проведена плоскость. Найти отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади ее основания, если известно, что секущая плоскость перпендикулярна к боковой грани.

87. Радиус основания конуса равен $R$, образующая наклонена к плоскости основания под углом, равным $\alpha$. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом, равным $\varphi$, к его высоте. Определить площадь полученного сечения.

88. Угол наклона бокового ребра правильной четырехугольной пирамиды к плоскости основания равен $\alpha$, сторона основания равна $a$. Из центра основания пирамиды на две смежные боковые грани опущены перпендикуляры. Определить площадь сечения, образованного плоскостью, проведенной через два построенных перпендикуляра.

89. В правильной четырехугольной призме через середины двух смежных сторон основания проведена плоскость, пересекающая три боковых ребра и наклоненная к плоскости основания под углом $\alpha$. Сторона основания равна $a$. Определить площадь полученного сечения.

90. Правильная пятиугольная пирамида $SABCDE$ пересечена плоскостью, проходящей через вершины $A$ и $C$ основания и середины ребер $SD$ и $SE$. Найти площадь сечения, если ребро основания пирамиды $a$, а боковое ребро равно $b$.

## § 5. Нахождение неизвестных углов

91. Найти объем правильной четырехугольной пирамиды со стороной основания, равной $a$, и плоскими углами при вершине, конгруэнтными углам наклона боковых ребер к основанию.

Решение. Объем пирамиды находим по формуле $V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}a^2H$. Обозначим $\widehat{DKC} = \widehat{KCO} = x$ (рис. 87). Из треугольников $KMC$ и $KCO$ находим

$$|OK| = H = \frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x,$$

$$|KC| = \frac{a}{2\sin\frac{x}{2}} \text{ и } |KC| = \frac{a\sqrt{2}}{2\cos x},$$

следовательно, приравнивая полученные выражения для $|KG|$, получим

$$\cos x = \sqrt{2}\sin\frac{x}{2}.$$

Возводя обе части этого выражения в квадрат, имеем

$$(\cos^2 x = 1 - \cos x) \Rightarrow \left(\cos x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right).$$

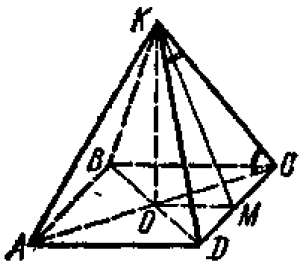


Рис. 87

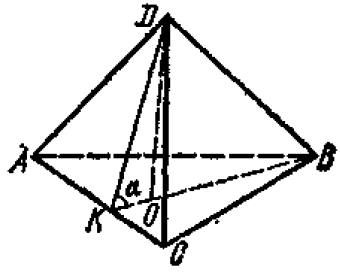


Рис. 88

Тогда

$$\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},$$

$$\operatorname{tg} x = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}.$$

Далее получим

$$V = \frac{1}{3}a^2\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{tg} x = \frac{a^3\operatorname{tg} x}{3\sqrt{2}} = \frac{a^3}{6}\sqrt{\sqrt{5}+1}.$$

**92.** Боковая поверхность правильной треугольной пирамиды в 5 раз больше площади ее основания. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Решение. Обозначим $\widehat{DKO} = \alpha$ (рис. 88), тогда $\cos\alpha = \frac{S}{S_6}$. Так как по условию $\frac{S_6}{S} = 5$, то $\cos\alpha = \frac{1}{5}$. Пусть $|AC| = a$, $\widehat{ADC} = x$, тогда из треугольника $KDC$ находим $|DK| = \frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$. Из треугольника $DKO$ находим $|DK| = \frac{|OK|}{\cos\alpha} = 5|OK|$, где $|OK| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, тогда $|DK| =$

$= \frac{5}{6} a\sqrt{3}$. Приравнивая полученные выражения для $|DK|$, получаем

$$\left(\frac{a}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{5a\sqrt{3}}{6}\right) \Rightarrow \left(\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{3} = \frac{5}{\sqrt{3}}\right),$$

откуда

$$x = 2\operatorname{arcctg}\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

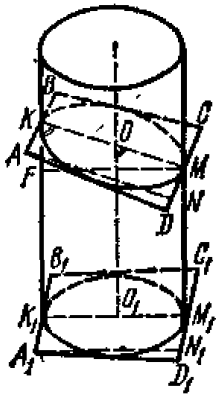



Рис. 89

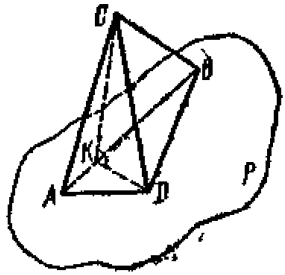



Рис. 90

**93.** Стороны равнобедренной трапеции касаются цилиндра, ось которого перпендикулярна к параллельным сторонам трапеции. Найти угол, который образует ось цилиндра с плоскостью трапеции, если длины оснований трапеции равны $a$ и $b$, а высота трапеции равна $h$.

Решение. Если спроектировать трапецию $ABCD$ и сечение цилиндра плоскостью этой трапеции на плоскость основания цилиндра, то получим трапецию $A_1B_1C_1D_1$, в которую вписана окружность (рис. 89). Очевидно, $|A_1B_1| = |AB| = a$, $|C_1D_1| = |CD| = b$. Исходя из свойств трапеции, в которую вписана окружность, имеем

$$|A_1D_1| = \frac{a+b}{2}, \quad |D_1N_1| = \frac{b-a}{2}.$$

Из треугольника $A_1D_1N_1$ находим

$$|A_1N_1| = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{b-a}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

Поскольку $|A_1N_1| = |K_1M_1| = |FM|$, то из треугольника $FKM$ находим $\sin x$, где $x$ — искомая величина угла между

осью цилиндра и плоскостью трапеции ($\widehat{FKM} = \widehat{O_1OM} = x$):

$$\left(\sin x = \frac{|FM|}{|KM|} = \frac{\sqrt{ab}}{h}\right) \Rightarrow \left(x = \arcsin \frac{\sqrt{ab}}{h}\right).$$

**94.** Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в некоторой плоскости $p$, а катеты составляют с этой плоскостью углы $\alpha$ и $\beta$. Найти угол между плоскостью треугольника и плоскостью $p$.

Решение. В прямоугольном треугольнике $ABC$ $[AB]$ — гипотенуза, $[AC]$ и $[BC]$ — катеты. По условию $\widehat{CAD} = \alpha$, $\widehat{CBD} = \beta$ (рис. 90). Обозначим $|CD| = a$, $\widehat{CKD} = x$, ($[CK] \perp [AB]$, $[DK] \perp [AB]$), тогда

$$|AC| = \frac{a}{\sin \alpha}, \quad |BC| = \frac{a}{\sin \beta}.$$

По теореме Пифагора,

$$|AB| = \sqrt{\left(\frac{a}{\sin \alpha}\right)^2 + \left(\frac{a}{\sin \beta}\right)^2} = \frac{a\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}{\sin \alpha \sin \beta}.$$

Вычислим площадь треугольника $ABC$ различными способами:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CK|, \quad S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC|,$$

откуда

$$(|AB| \cdot |CK| = |AC| \cdot |BC|) \Rightarrow \left(|CK| = \frac{|AC| \cdot |BC|}{|AB|} = \frac{a}{\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}}\right).$$

Из треугольника $CKD$ находим

$$\sin x = \frac{|CD|}{|CK|} = \sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta},$$

откуда

$$x = \arcsin\left(\sqrt{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta}\right).$$

**95.** Каким должен быть угол наклона образующей к основанию конуса, чтобы площадь поверхности вписанного в него шара делилась окружностью, по которой шар касается конуса, в отношении 1 : 3?

**96.** В правильной прямой треугольной призме через сторону основания проведена плоскость. Образовавшееся сечение — треугольник с периметром вдвое большим, чем у основания. Найти угол между этой плоскостью и основанием и вычислить отношение радиусов окружностей, вписанной в сечение и описанной около основания.

**97.** В правильной шестиугольной пирамиде отношение высоты к стороне основания равно $k$. Определить двугранный угол между соседними боковыми гранями.

**98.** Площадь основания цилиндра относится к площади его осевого сечения как $m:n$. Найти острый угол между диагоналями осевого сечения.

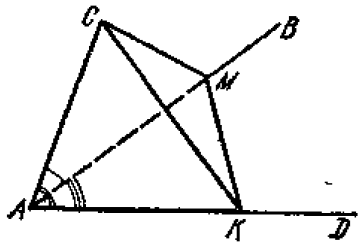


Рис. 91

**99.** Стороны основания прямого параллелепипеда относятся как $1:2$, острый угол в основании равен $\alpha$. Найти угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания, если высота параллелепипеда конгруэнтна большей диагонали основания.

**100.** Квадрат, сторона которого $a$, проектируется на некоторую плоскость в виде ромба со стороной $b$ и острым углом $\alpha$. Найти угол между плоскостями квадрата и его проекции.

**101.** Плоские углы трехгранного угла равны $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$. Найти величину двугранного угла между плоскостями конгруэнтных плоских углов.

Решение. По условию $C\widehat{A}B = C\widehat{A}D = \frac{\pi}{4}$, $B\widehat{A}D = \frac{\pi}{3}$ (рис. 91). Построим отрезки $|AC| = |CK| = |CM| = a$. Таким образом, построена пирамида $CAMK$ с конгруэнтными боковыми ребрами. Необходимо найти угол между гранями $ACK$ и $ACM$. Треугольник $ACK$ равнобедренный $\left(C\widehat{A}K = C\widehat{K}A = \frac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, $A\widehat{C}K = \frac{\pi}{2}$, т. е. $[KC] \perp [AC]$. Точно так же $[MC] \perp [AC]$. Следовательно, $K\widehat{C}M$ и будет искомой величиной двугранного угла.

Из треугольника $ACK$ находим

$$|AK| = a\sqrt{2}, \quad |AM| = |AK| = a\sqrt{2}.$$

В равнобедренном треугольнике $AMK$ $\widehat{MAK} = \frac{\pi}{3}$, следовательно, треугольник равносторонний, поэтому $|MK| = |AK| = a\sqrt{2}$. Таким образом, в треугольнике $MCK$ известны все стороны ($|KC| = |MC| = a$, $|MK| = a\sqrt{2}$). По теореме косинусов найдем $\cos x$, где $x = \widehat{MCK}$:

$$(|MK|^2 = |CM|^2 + |CK|^2 - 2|CM| \cdot |KC| \cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos x) \Rightarrow (\cos x = 0) \Rightarrow \left(x = \frac{\pi}{2}\right).$$

**102.** Определить угол наклона ребра правильного тетраэдра к основанию.

**103.** *Высота правильной четырехугольной пирамиды* вдвое больше диагонали основания. Определить тангенс двугранного угла между плоскостью боковой грани и плоскостью основания.

**104.** Прямоугольный треугольник вращается последовательно вокруг каждой стороны. Одно из полученных трех тел вращения равновелико сумме двух других. Найти углы треугольника.

**105.** В правильной четырехугольной пирамиде плоский угол при вершине равен $\beta$. Найти двугранные углы при ребре основания и боковом ребре.

**106.** Угол при вершине в осевом сечении конуса равен $\alpha$; определить центральный угол в развертке боковой поверхности конуса.

**107.** В шаровом секторе через середину радиуса, перпендикулярного к основанию соответствующего шарового сегмента, проведена плоскость, перпендикулярная к данному радиусу. Эта плоскость делит коническую поверхность сектора на две равновеликие части. Определить угол в осевом сечении шарового сектора.

**108.** В правильной $n$-угольной пирамиде величина двугранного угла при боковом ребре равна $2\alpha$. Определить двугранный угол при ребре основания.

**109.** В правильной $n$-угольной пирамиде величина двугранного угла при боковом ребре равна $2\alpha$. Определить угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды.

## § 6. Комбинации геометрических тел

**110.** В основании четырехугольной пирамиды — квадрат со стороной $a$. Две боковые грани перпендикулярны к основанию, наибольшее ребро наклонено к основанию под углом $\alpha$. Найти объем вписанного параллелепипеда, вершины верхнего основания которого лежат на боковых ребрах пирамиды, а диагональ образует угол $\beta$ с высотой.

Решение. В основании параллелепипеда лежит квадрат $A_1BC_1D_1$ (рис. 92). Объем параллелепипеда $V = x^2H$, где $x = |A_1D_1|$, $H = |BN| = |D_1E|$. Имеем ($|BD| = a\sqrt{2}$, $|BD_1| = x\sqrt{2}$) $\Rightarrow$ ($|D_1D| = \sqrt{2}(a - x)$). Из треугольников $BND_1$ и $D_1ED$ находим

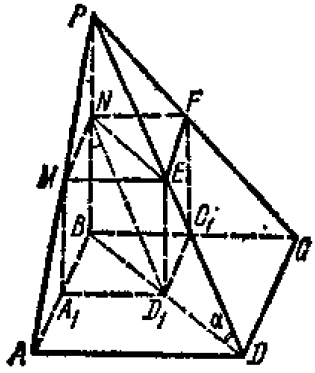


Рис. 92

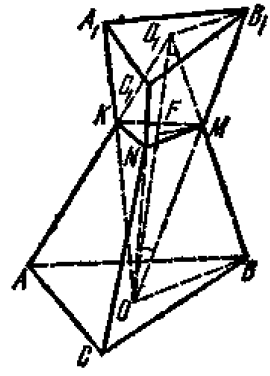


Рис. 93

$$|D_1E| = H = x\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta;$$

$$\left(\frac{|D_1E|}{|D_1D|} = \operatorname{tg}\alpha\right) \Rightarrow \left(\frac{x\sqrt{2}\operatorname{ctg}\beta}{\sqrt{2}(a-x)} = \operatorname{tg}\alpha\right) \Rightarrow \left(x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\right).$$

Далее получим

$$V = x^2H = \sqrt{2}\left(\frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}\right)^3\operatorname{ctg}\beta.$$

**111.** Две правильные треугольные пирамиды имеют общую высоту, вершина каждой пирамиды лежит в центре основания другой; боковые ребра одной пересекают боковые ребра другой. Боковое ребро $l$ одной пирамиды образует с высотой угол $\alpha$, боковое ребро второй образует с высотой угол $\beta$. Найти объем общей части двух пирамид.

Решение. Искомый объем равен сумме объемов пирамид с общим основанием $KMN$ (рис. 93) и равен $\frac{1}{3}SH$,

где $H = |O_1O|$, $S = S_{\triangle KMN}$. Рассмотрим сечение $B_1O_1OB$, считая $|BO_1| = l$, $\widehat{OO_1B} = \alpha$, $\widehat{O_1OB_1} = \beta$. Из треугольника $OO_1B$ находим

$$H = l\cos\alpha.$$

Обозначив $|FM| = x$, получаем из треугольников $FO_1M$ и $FOM$

$$|FO_1| = x\operatorname{ctg}\alpha, \quad |FO| = x\operatorname{ctg}\beta,$$

тогда

$$(H = |FO_1| + |FO|) \Rightarrow (l\cos\alpha = x(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(x = \frac{l\sin 2\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}\right).$$

Площадь треугольника $KMN$ равна $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где $a = |KN|$. Так как $|FM| = x = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, то $a = x\sqrt{3}$ и $S = \frac{3x^2\sqrt{3}}{4}$. Тогда объем

$$V = \frac{l^3\sqrt{3}\cos\alpha\sin^2 2\alpha\sin^2\beta}{16\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

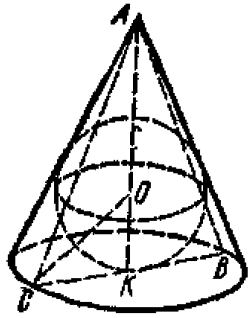



Рис. 94

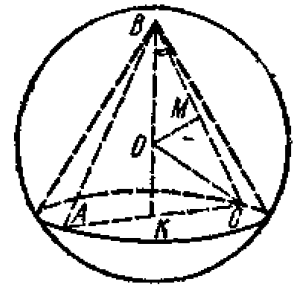



Рис. 95

**112.** Определить угол между образующей и плоскостью основания конуса, объем которого в $m$ раз больше объема вписанного шара.

Решение. В осевом сечении конуса и шара получим треугольник $ABC$, в который вписана окружность. Центр вписанного шара находится в точке пересечения биссектрис углов $ACB$ и $BAC$ (рис. 94). Обозначим радиус вписанного шара $R$, а величину неизвестного угла $x$ и выра-

зим высоту конуса $H$ и радиус основания $r$ через эти величины. Из треугольников $OKC$ и $AKC$ находим

$$r = R \operatorname{ctg} \frac{x}{2}, \quad H = R \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x.$$

Исходя из условия задачи, получаем

$$\left(\frac{1}{3} \pi \left(R \operatorname{ctg} \frac{x}{2}\right)^2 R \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = m \frac{4}{3} \pi R^3\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} \operatorname{tg} x = 4m\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^3 \frac{x}{2}} \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 4m\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}\right),$$

откуда

$$x = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{2m}}}.$$

**113.** В шар вписан конус. Площадь осевого сечения конуса равна $S$, а угол между высотой и образующей равен $\alpha$. Определить объем шара.

Решение. Рассмотрим сечение шара и конуса, проходящее через высоту конуса (рис. 95). В сечении получим круг и вписанный в него треугольник $ABC$. По условию $\widehat{KBC} = \alpha$, $S_{\triangle ABC} = S$. Обозначим $|BC| = x$ и составим уравнение $S = \frac{1}{2} x^2 \sin 2\alpha$, из которого находим

$$x = \sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}.$$

Треугольник $BOC$ — равнобедренный ($|BO| = |OC| = R$). Из точки $O$ проведем высоту $OM$. Из треугольника $BOM$, учитывая, что $|BM| = \frac{x}{2}$, находим

$$R = \frac{|BM|}{\cos \alpha} = \frac{x}{2 \cos \alpha}.$$

Далее имеем

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi \frac{x^3}{8 \cos^3 \alpha} = \frac{\pi}{6 \cos^3 \alpha} \left(\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}\right)^3.$$

**114.** В полушар радиуса $R$ вписан куб так, что четыре его вершины лежат на основании полушара, а другие

четыре вершины расположены на его сферической поверхности. Вычислить отношение объема куба к объему полушара.

**115.** (11.176) В шар радиуса $R$ вписана правильная четырехугольная пирамида. Определить объем этой пирамиды, если радиус окружности, описанной вокруг ее основания, равен $r$.

**116.** (11.128) В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре — в плоскости основания. Все ребра пирамиды конгруэнтны и каждое из них равно $a$. Вычислить полную поверхность и объем куба.

**117.** (12.244) В конус вписан шар. Радиус круга касания поверхности шара и боковой поверхности конуса равен $r$. Прямая, соединяющая центр шара с произвольной точкой окружности основания конуса, составляет с высотой конуса угол, равный $\alpha$. Найти объем конуса.

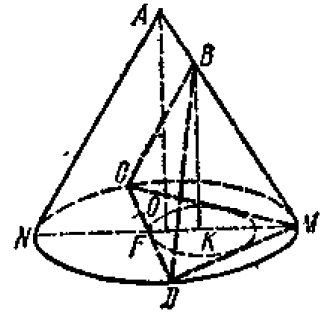


Рис. 96

**118.** В конус помещена пирамида так, что основание пирамиды вписано в основание конуса, а вершина лежит на одной из образующих конуса. Все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным $\alpha$. Найти отношение объема конуса к объему пирамиды.

Решение. Поскольку все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то высота пирамиды $BK$ проектируется в центр вписанной окружности (рис. 96). Обозначим $V$ — объем конуса, $V_1$ — объем пирамиды, $R$ — радиус основания конуса, $H$ — высота конуса, $H_1$ — высота пирамиды, $S = S_{\triangle CMD}$ и запишем формулы для нахождения отношения объема конуса к объему пирамиды:

$$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi R^2 H}{\frac{1}{3} S H_1} = \frac{\pi R^2}{S} \cdot \frac{H}{H_1}.$$

По условию $\widehat{CMD} = \alpha$. Из треугольника $CMD$ находим $\widehat{MCD} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$. Используя теорему синусов, получаем

$$\left(\frac{|CM|}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=2R\right)\Rightarrow\left(|CM|=2R\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Тогда

$$S=\frac{1}{2}|CM|^2\sin\alpha=\frac{1}{2}\left(2R\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2\sin\alpha=2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha.$$

Отношение высот $\frac{H}{H_1}$ найдем из подобия треугольников $AOM$ и $BKM$:

$$\frac{H}{H_1}=\frac{|OM|}{|KM|}=\frac{R}{h-r},$$

где $h$ — высота треугольника $CMD$, $r$ — радиус вписанной в этот треугольник окружности. Далее имеем

$$h=|CM|\cos\frac{\alpha}{2}=2R\cos^2\frac{\alpha}{2};\quad r=\frac{S}{p};$$

$$p=|CM|+|CF|;$$

$$|CF|=|CM|\sin\frac{\alpha}{2};\quad p=2R\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right);$$

$$r=\frac{2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{2R\cos\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{R\cos\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\sin\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right).$$

Таким образом,

$$\frac{H}{H_1}=\frac{R}{2R\cos^2\frac{\alpha}{2}-2R\sin\frac{\alpha}{2}\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Окончательно имеем

$$\frac{V}{V_1}=\frac{\pi R^2}{2R^2\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}\cdot\frac{1}{2\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=$$

$$=\frac{\pi}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\alpha\left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

**119.** (12.251) Центр шара, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, делит высоту пирамиды в отношении $\frac{m}{n}$, считая от вершины пирамиды. Найти угол между двумя смежными боковыми гранями.

Решение. Обозначим величину искомого угла $DLB$ через $x$ (рис. 97). Здесь $[DL] \perp [AM]$, $[BL] \perp [AM]$. Из $\triangle DLK$ имеем $\widehat{DLK} = \frac{x}{2}$. По условию задачи $|MO| : |OK| = m : n$, поэтому принимаем $|MO| = my$, $|OK| = ny$. Так как $[OF] \perp [MN]$, то треугольники $MFO$ и $MNK$ подобны. Из подобия этих треугольников получим

$$\left(\frac{|OF|}{|FM|} = \frac{|NK|}{|MK|}\right) \Rightarrow \left(|NK| = \frac{|OF|\,|MK|}{|FM|}\right).$$

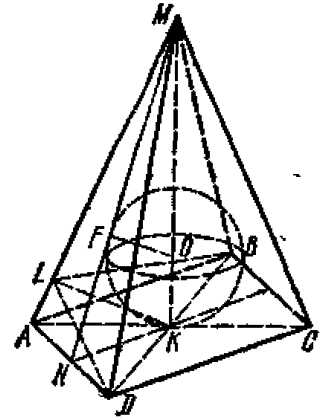


Рис. 97

Далее находим

$$|FM| = y\sqrt{m^2 - n^2},$$
$$|MK| = (m+n)y, \quad |OF| = |OK|,$$

тогда

$$|NK| = \frac{yn(m+n)}{\sqrt{m^2 - n^2}}.$$

Поскольку в основании пирамиды квадрат, то $|AK| = |DK| = |NK|\sqrt{2} = \frac{yn(m+n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 - n^2}}$. Из треугольника $AMK$ находим

$$|AM| = \sqrt{|MK|^2 + |AK|^2} =$$
$$= y\sqrt{(m+n)^2 + \frac{2n^2(m+n)^2}{m^2 - n^2}} = \frac{y(m+n)\sqrt{m^2 + n^2}}{\sqrt{m^2 - n^2}}.$$

Вычисляя площадь треугольника $AMK$ различными способами, получим

$$\left(\frac{1}{2}|KL|\,|AM| = \frac{1}{2}|AK|\,|MK|\right) \Rightarrow \left(|KL| = \frac{|AK| \cdot |MK|}{|AM|}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(|KL| = \frac{yn(m+n)\sqrt{2}}{\sqrt{m^2 + n^2}}\right).$$

Далее находим $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{|DK|}{|KL|}=\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}}$, откуда

$$x=2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}}.$$

**120.** (12.350) Боковые ребра и две стороны основания треугольной пирамиды равны $a$, а угол между равными сторонами основания равен $\alpha$. Найти радиус шара, описанного около пирамиды.

Решение. Проведем диаметр $DM$ и соединим точки $M$ и $A$, получим прямоугольный треугольник $ADM$, в котором $|AK|$ — перпендикуляр, опущенный на гипотенузу (рис. 98). Используя свойства этого перпендикуляра, получим соотношение

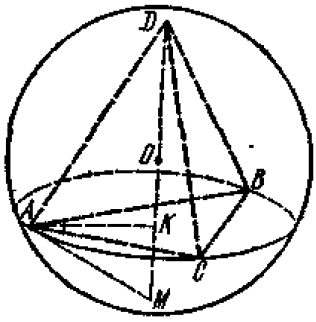


Рис. 98

$$|AD|^2=|DK|\cdot|DM|, \quad (2)$$

где $|AD|=a$, $|DM|=2x$ — неизвестный диаметр шара. Таким образом, остается найти $|DK|$ — высоту пирамиды. Для этого необходимо определить $|AK|=R$ — радиус окружности, описанной около треугольника $ABC$. Рассмотрим треугольник $ABC$. В нем $|AB|=|AC|=a$, $\widehat{BAC}=\alpha$. Находим $\widehat{ABC}=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$; используя теорему синусов, получим

$$\left(\frac{a}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}=2R\right)\Rightarrow\left(R=\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right).$$

Из треугольника $ADK$ находим

$$|DK|=\sqrt{a^2-R^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}\right)^2}=$$

$$=a\frac{\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Подставим в соотношение (2) найденные величины:

$$x = \frac{a^2}{2|DK|} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{4\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}} = \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2(1+\cos\alpha)-1}} =$$

$$= \frac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}.$$

**121.** (12.348) Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна $a$, плоский угол при вершине пирамиды равен $\alpha$. Найти радиус вписанного в пирамиду шара.

**122.** (12.349) Радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду, в четыре раза меньше стороны основания пирамиды. Найти косинус плоского угла при вершине пирамиды.

**123.** (12.356) В конус вписан шар. Окружность касания шаровой и конической поверхностей делит поверхность шара в отношении 1 : 4. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

**124.** (12.249) Боковое ребро правильной усеченной четырехугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед так, что верхнее его основание совпадает с верхним основанием пирамиды, а нижнее основание лежит в плоскости нижнего основания пирамиды. Найти отношение боковой поверхности пирамиды к боковой поверхности параллелепипеда, если диагональ параллелепипеда составляет с его основанием угол, равный $\beta$.

**125.** (12.252) Отношение стороны основания правильной $n$-угольной пирамиды к радиусу описанного шара равно $k$. Найти угол между боковым ребром и плоскостью основания.

**126.** (12.256) Основанием пирамиды служит прямоугольник, у которого угол между диагоналями равен $\alpha$. Одно из боковых ребер пирамиды перпендикулярно к плоскости основания, а наибольшее из боковых ребер составляет с плоскостью основания угол, равный $\beta$. Радиус шара, описанного около пирамиды, равен $R$. Определить объем пирамиды.

**127.** Сечение, перпендикулярное к высоте конуса, делит конус на две равные по объему части и проходит через

центр шара, описанного вокруг конуса. Найти угол между образующей и плоскостью основания конуса.

Решение. Обозначим $|BO_1| = r$, $|KO| = r_1$, $|AO_1| = H$, $|AO| = R$, $\angle AKO = x$ (рис. 99). Исходя из условия задачи, получим

$$V_1 = \frac{1}{2}V;\ V_1 = \frac{1}{3}\pi r_1^2 R;\ V = \frac{1}{3}\pi r^2 H,$$

где $V_1$ — объем отсеченного конуса. Выразим все величины, входящие в уравнения, через $R$ и $x$. Из треугольника $AKO$ находим

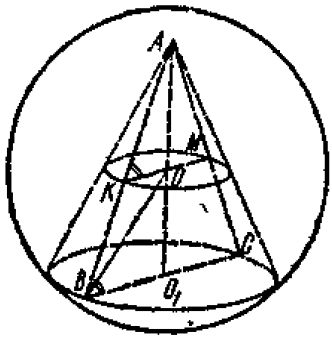


Рис. 99

$$r_1 = R\operatorname{ctg} x,\quad \angle KAO = \frac{\pi}{2} - x.$$

Из треугольника $BOO_1$ получим $\angle BOO_1 = 2\angle BAO_1$, как углы опирающиеся на одну и ту же дугу, т. е. $\angle BOO_1 = \pi - 2x$, поэтому

$$r = R\sin(\pi - 2x) = R\sin 2x.$$

Далее имеем

$$H = r\operatorname{tg} x = R\sin 2x\operatorname{tg} x.$$

Подставим все найденные величины в $V_1 = \frac{1}{2}V$ и, выполнив преобразования, получим

$$\left(\frac{1}{3}\pi r_1^2 R = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 H\right) \Rightarrow \left(R^3\operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{2}R^3\sin^3 2x\operatorname{tg} x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2\operatorname{ctg}^3 x = \sin^3 2x) \Rightarrow (\sin 2x = \sqrt[3]{2}\operatorname{ctg} x) \Rightarrow (2\sin x\cos x = \sqrt[3]{2}\frac{\cos x}{\sin x}).$$

Поскольку $\cos x \neq 0$, то имеем

$$(2\sin^2 x = \sqrt[3]{2}) \Rightarrow \left(\sin x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \Rightarrow \left(x = \arcsin\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right).$$

128. (11.185) Найти объем шара, вписанного в пирамиду, в основании которой лежит треугольник со сторонами, равными 13, 14 и 15 см, если вершина пирамиды удалена от каждой стороны основания на 5 см.

Решение. Так как $|DK| = |DM| = |DN| = 5$ (рис. 100), то высота пирамиды проектируется в центр окружности, вписанной в основание. Найдем $r = |OK|$, используя соотношения

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = rp,$$

где $p = \frac{13+14+15}{2} = 21$. После вычислений получаем $S = 84$, $r = 4$. Из треугольника $DKO$ находим

$$|DO| = \sqrt{|DK|^2 - |OK|^2} = \sqrt{25-16} = 3.$$

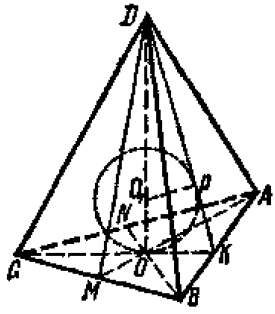


Рис. 100

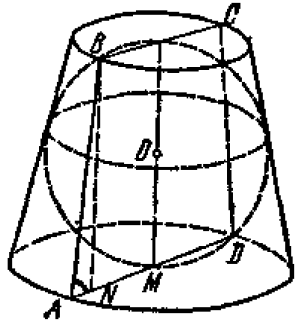


Рис. 101

Обозначим $P$ — точка касания шара с апофемой $[DK]$, $|PO_1| = x$ — радиус вписанного шара. Тогда треугольники $DPO_1$ и $DKO$ подобны. Из подобия этих треугольников получаем

$$\left(\frac{|PO_1|}{|O_1D|} = \frac{|OK|}{|DK|}\right) \Rightarrow \left(\frac{x}{3-x} = \frac{4}{5}\right).$$

Решая это уравнение, находим $x = \frac{4}{3}$, тогда объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi x^3 = \pi\left(\frac{4}{3}\right)^4.$$

129. (12.238) В усеченный конус вписан шар. Сумма длин диаметров верхнего и нижнего оснований конуса в пять раз больше длины радиуса шара. Найти угол между образующей конуса и плоскостью основания.

Решение. Обозначим величину искомого угла $BAN$ через $x$ (рис. 101). В осевом сечении усеченного конуса имеем трапецию $ABCD$, в которую вписан круг. По свойству этой трапеции $|BC| + |AD| = 2|AB|$, но по условию

$|BC|+|AD|=5R$, где $R$ — радиус шара, следовательно $|AB|=2{,}5R$. Из треугольника $ABN$ находим

$$\left(\sin x=\frac{|CN|}{|AB|}=\frac{2R}{2{,}5R}=0{,}8\right)\Rightarrow(x=\arcsin 0{,}8).$$

130. (12.241) В шар, радиус которого равен $R$, вписан конус; в этот конус вписан цилиндр с квадратным осевым сечением. Найти полную поверхность цилиндра, если угол между образующей конуса и плоскостью его основания равен $\alpha$.

131. Около правильной треугольной пирамиды, двугранный угол между боковыми гранями которой равен $\varphi$, описан шар. Найти отношение объема пирамиды к объему шара.

132. Сторона нижнего основания правильной усеченной четырехугольной пирамиды в пять раз больше стороны верхнего основания. Площадь боковой поверхности пирамиды равна квадрату ее высоты. Найти угол между боковым ребром пирамиды и плоскостью основания.

133. В правильный тетраэдр вписан шар, касающийся граней тетраэдра. В шар вписан новый правильный тетраэдр. Найти отношение объемов двух тетраэдров.

134. Стороны основания параллелепипеда $a$ и $b$ образуют между собой угол $\alpha$; боковое ребро его, равное $c$, наклонено к плоскости основания под углом $\beta$. Определить объем параллелепипеда.

135. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция с острым углом, равным $\alpha$. Эта трапеция описана около окружности основания конуса. Вершина пирамиды лежит на одной из образующих конуса и ее проекция на плоскость основания совпадает с точкой пересечения диагоналей трапеции. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

136. Правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой $l$ наклонено к основанию под углом $\alpha$, пересекается плоскостью, проходящей через центр описанного шара и вершину основания параллельно диагонали основания. Определить площадь получившегося сечения.

137. В правильную четырехугольную пирамиду, двугранный угол между боковыми гранями которой равен $\alpha$, вписан шар. Плоскость, параллельная боковому ребру и проходящая через диагональ основания пирамиды, рассекает шар на две части. Найти отношение объемов этих частей.

**138.** Определить площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, зная поверхности $S_1$ вписанного и $S_2$ описанного шаров.

**139.** Определить угол в осевом сечении конуса, если объем вписанного в него шара равен объему, содержащемуся между сферической поверхностью и вершиной конуса.

**140.** Определить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если центры вписанного и описанного шаров совпадают.

**141.** В конус вписан шар. Площадь поверхности шара относится к площади основания конуса как 4 : 3. Найти угол при вершине осевого сечения конуса.

**142.** В правильной треугольной пирамиде, сторона основания которой равна $a$, боковое ребро равно $2a$, через середину бокового ребра перпендикулярно к нему проведена плоскость. Определить площадь образующегося сечения.

**143.** Треугольник со сторонами $a$, $b$ и $c$ вращается вокруг стороны $a$. Определить объем тела вращения.

**144.** В конус, высота которого равна 12 см, вписан шар радиуса 3 см. Вычислить объем конуса.

**145.** Шаровой слой имеет основаниями круги радиусов $a$ и $b$ $(a < b)$. Площадь боковой поверхности пояса, ограничивающего слой, равна сумме площадей его оснований. Вычислить радиус шара.

**146.** Определить объем параллелепипеда, в котором даны площади $p$ и $q$ двух его граней, длина $a$ их общего ребра и угол $\alpha$ между этими гранями.

**147.** В правильной пирамиде $SABC$ высота равна радиусу окружности, описанной около основания $ABC$. Через вершину $A$ проведена плоскость, параллельная ребру $BC$ и перпендикулярная к грани $BSC$. Определить угол между этой плоскостью и основанием $ABC$.

**148.** Определить величину двугранного угла при основании правильной четырехугольной пирамиды, если радиус описанного шара в $k$ раз больше радиуса вписанного шара.

Решение. Обозначим $R$ и $r$ — соответственно радиусы описанного и вписанного шаров, $a$ — сторона основания, $\widehat{SNM} = x$ — величина двугранного угла при основании (рис. 102, *а*). Выразим $R$ и $r$ через $a$ и $x$. Из треугольников $MO_1N$, $MSN$ находим

$$r = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad |MS| = \frac{a}{2}\operatorname{tg} x.$$

Так как $|MD| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, то из треугольника $MSD$ находим (рис. 102, *б*)

$$|SD| = \sqrt{|MS|^2 + |MD|^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\operatorname{tg} x\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2 x + 2}.$$

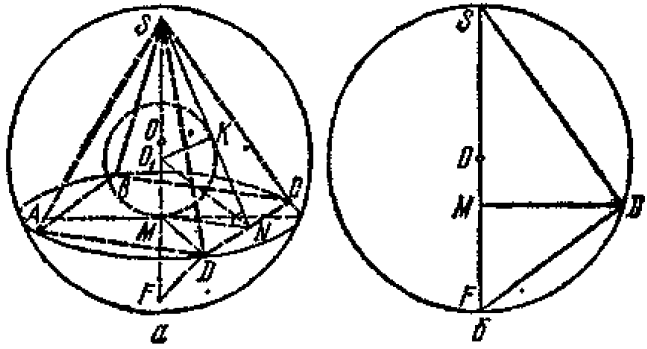



Рис. 102

Из прямоугольного треугольника $SDF$ имеем

$$(|SD|^2 = |MS| \cdot 2R) \Rightarrow \left(\frac{a^2}{4}(\operatorname{tg}^2 x + 2) = \frac{a}{2}\operatorname{tg} x \cdot 2R\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(R = \frac{a(\operatorname{tg}^2 x + 2)}{4\operatorname{tg} x}\right).$$

По условию $R = kr$, отсюда получим

$$\left(\frac{a(\operatorname{tg}^2 x + 2)}{4\operatorname{tg} x} = k\frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) \Rightarrow \left(\operatorname{tg}^2 x + 2 = 2k\operatorname{tg} x \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right).$$

Используя формулу $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x}$, получим равносильные уравнения

$$\left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2 = 2k\left(\frac{1-\cos x}{\cos x}\right)\right) \Rightarrow (1 - \cos^2 x + 2\cos^2 x =$$

$$= 2k\cos x(1 - \cos x)),$$

Производя подстановку $\cos x = y$, получим

$$(y^2(1 + 2k) - 2ky + 1 = 0) \Rightarrow \left(y = \frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k - 1}}{2k + 1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(x = \arccos\frac{k \pm \sqrt{k^2 - 2k - 1}}{2k + 1}\right).$$

Решая неравенство $k^2 - 2k - 1 \geqslant 0$ и учитывая, что $k > 0$, находим допустимые значения $k$: $k \geqslant 1 + \sqrt{2}$.

**149.** В треугольной пирамиде $ABCD$ дано: $|AB| = 6$ см, $|CD| = 8$ см, каждое из остальных ребер равно $\sqrt{74}$ см. Найти радиус описанного шара.

Решение. Поскольку не все боковые ребра пирамиды конгруэнтны, то высота пирамиды не проходит через центр шара (рис. 103). Проводим сечение пирамиды, проходящее через высоту пирамиды $DN$ и высоту основания $CM$. Так как грани $ACD$ и $BCD$ — конгруэнтные треугольники, то центр шара находится в плоскости треугольника $DCM$. Поскольку треугольники $ABC$ и $ABD$ конгруэнтны, то $|CM| = |DM|$. Высота $MF$ треугольника $CMD$ будет и его медианой. Следовательно, $[MF]$ будет частью диаметра шара и центр шара (точка $O$) находится на линии $MF$.

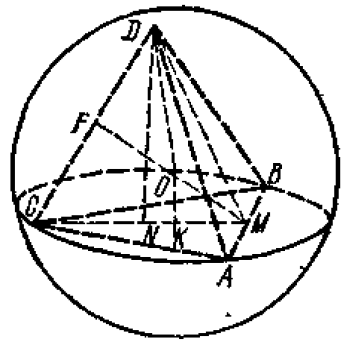


Рис. 103

Из треугольников $ACM$ и $MCF$ находим

$$|CM| = |DM| = \sqrt{74 - 9} = \sqrt{65}, \quad |MF| = \sqrt{65 - 16} = 7.$$

Используя формулу $R = \frac{abc}{4S}$, находим $|CK|$, где $K$ — центр окружности, описанной около треугольника $ABC$:

$$|CK| = R = \frac{37}{\sqrt{65}}.$$

Из подобия треугольников $OKM$ и $CFM$ получаем

$$\left(\frac{|OM|}{|MK|} = \frac{|CM|}{|MF|}\right) \Rightarrow \left(|OM| = \frac{|MK| \cdot |CM|}{|MF|} = \right.$$
$$\left. = \frac{|(CM| - R)\,|CM|}{|MF|} = \frac{28}{7} = 4\right).$$

Следовательно, $|OF| = 3$. Из треугольника $FOD$ находим $|OD|$ — радиус шара:

$$|OD| = \sqrt{|OF|^2 + |FD|^2} = \sqrt{9 + 16} = 5.$$

**150.** Плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды равен $\frac{\pi}{2}$. Найти отношение площади боковой поверхности этой пирамиды к площади ее основания.

151. Конус и полушар имеют общее основание, радиус которого равен $R$. Найти площадь боковой поверхности конуса, если его объем равен объему полушара.

152. (11.100) Высота конуса разделена на три конгруэнтных отрезка и через точки деления проведены параллельно основанию плоскости, разбивающие конус на три части. Найти объем средней части, если объем конуса равен $V$.

153. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна $a$. Вычислить объем этой пирамиды, если известно, что площадь ее боковой поверхности в $n$ раз больше площади основания.

154. (12.112) Основанием пирамиды служит параллелограмм $ABCD$ с площадью $m^2$. Диагональ $[BD]$ перпендикулярна к $[AD]$, двугранные углы при ребрах $AD$ и $BC$ равны $\frac{\pi}{4}$, а при ребрах $AB$ и $CD$ равны $\frac{\pi}{3}$. Найти площадь боковой поверхности и объем пирамиды.

155. (11.115) В основании призмы лежит трапеция. Выразить объем этой призмы через площади $S_1$ и $S_2$ параллельных боковых граней и расстояние $h$ между ними.

156. (11.116) Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 см$^2$, площади боковых граней равны 9, 10 и 17 см$^2$. Определить объем призмы.

157. (12.084) Найти косинус угла между апофемой и диагональю основания правильной четырехугольной пирамиды, у которой боковое ребро конгруэнтно стороне основания.

158. (12.100) В основании прямой призмы лежит равнобедренная трапеция, у которой диагональ равна $a$ и угол между диагональю и большим основанием равен $\alpha$. Диагональ призмы наклонена к основанию под углом $\beta$. Найти объем призмы.

159. (12.108) Через сторону нижнего основания куба проведена плоскость, делящая объем куба в отношении $m:n$, считая от нижнего основания. Найти угол между этой плоскостью и плоскостью основания, если $m \leqslant n$.

## § 7. Операции над векторами

*Вектор* — это отрезок определенной длины и направления. Вектор, соединяющий точки $A$ и $B$, обозначают $\overrightarrow{AB}$ (точка $A$ — начало, а точка $B$ — конец вектора $\overrightarrow{AB}$).

При этом длина отрезка $AB$ называется длиной (модулем) $\overrightarrow{AB}$ ($|\overrightarrow{AB}|$).

Вектор, начинающийся и кончающийся в точке $A$, называется *нулевым вектором* и обозначается $\overrightarrow{AA}$. Понятие направления для нулевого вектора $\overrightarrow{AA}$ не вводится.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если их направления параллельны.

Если обозначить вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, то $\overrightarrow{OB}$ называют *суммой векторов* $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$). Сумму двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить по правилу параллелограмма. Для этого откладываем от точки $O$ векторы $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Через конец вектора $\vec{a}$ проводим прямую, параллельную вектору $\vec{b}$, а через конец вектора $\vec{b}$ — прямую, параллельную вектору $\vec{a}$. Если $C$ — точка пересечения этих прямых, то вектор $\overrightarrow{OC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$), а вектор $\overrightarrow{AB}$ — разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.

Скалярное произведение двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$ и равно

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \qquad (3)$$

где $\varphi = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если хотя бы один из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нулевой, то скалярное произведение таких векторов равно нулю.

Необходимое и достаточное условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} \perp \vec{b}$):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0. \qquad (4)$$

Пусть $Oxyz$ — прямоугольная система координат с тройкой базисных векторов $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. Любой вектор можно представить в виде

$$\vec{a} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k}. \qquad (5)$$

Числа $x_0$, $y_0$, $z_0$ называют координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ и пишут $\vec{a} = (x_0; y_0; z_0)$. Если заданы координаты точек $A$ и $B$ ($A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$), то вектор

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (6)$$

Если известны координаты векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то имеют место формулы:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2), \quad (7)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2, \quad (8)$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}, \quad (9)$$

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}, \quad (10)$$

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}, \quad (11)$$

где $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$ обозначает проекцию вектора $\vec{b}$ на вектор $\vec{a}$.

Уравнение

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (12)$$

определяет плоскость в пространственной прямоугольной системе координат, где вектор $\vec{N} = (A; B; C)$ перпендикуляреи к плоскости. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ находим по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (13)$$

Приведем решение нескольких задач.

**160.** Даны точки $A(3; 3; -2)$, $B(0; -3; 4)$, $C(0; -3; 0)$ и $D(0; 2; -4)$. Найти векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{b}$ и проекцию вектора $\vec{b}$ на $\vec{a}$.

Решение. По формуле (6) находим векторы $\vec{a} = (-3; -6; 6)$, $\vec{b} = (0; 5; -4)$. Далее имеем

$$\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{(-3)\cdot 0 + (-6)\cdot 5 + 6\cdot(-4)}{\sqrt{9+36+36}} = \frac{-54}{9} = -6.$$

**161.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = (2; 1; 0)$ и $\vec{b} = (0; -2; 1)$.

Решение. Находим векторы-диагонали

$$\vec{a}+\vec{b} = (2; -1; 1), \quad \vec{a}-\vec{b} = (2; 3; -1).$$

Далее по формуле (8) находим

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}+\vec{b}|\cdot|\vec{a}-\vec{b}|} = \frac{4-3-1}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}} = 0.$$

Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

**162.** Доказать, что треугольник $ABC$ равнобедренный. Вычислить внутренние углы этого треугольника, если известны координаты вершин $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$.

Решение. Находим координаты векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{BC}$:

$$\vec{AB} = (2; -3; 6), \quad \vec{AC} = (6; 2; -3); \quad \vec{BC} = (4; 5; -9).$$

Далее имеем

$$|\vec{AB}| = \sqrt{4+9+36} = 7; \quad |\vec{AC}| = 7; \quad |\vec{BC}| = \sqrt{122},$$

$$\cos\widehat{A} = \frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} = \frac{12-6-18}{7\cdot 7} = -\frac{12}{49};$$

$$\widehat{A} = \pi - \arccos\frac{12}{49}.$$

Треугольник $ABC$ равнобедренный, так как $|AB| = |AC|$, тогда

$$\widehat{B} = \widehat{C} = \frac{1}{2}(\pi - \widehat{A}) = \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{49}.$$

**163.** Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 2\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} - 2\vec{n}$, где $|\vec{m}| = |\vec{n}| = 1$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Так как векторы-диагонали соответственно равны $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$, то имеем

$$\vec{a} + \vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}, \quad \vec{a} - \vec{b} = \vec{m} + 3\vec{n}.$$

Тогда

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(3\vec{m} - \vec{n})(3\vec{m} - \vec{n})} =$$

$$= \sqrt{9|\vec{m}|^2 - 6\vec{m} \cdot \vec{n} + |\vec{n}|^2} = \sqrt{9 + 1 - 6 \cdot 1 \cdot \cos\frac{\pi}{3}} =$$

$$= \sqrt{7},$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{|\vec{m}|^2 + 6\vec{m} \cdot \vec{n} + 9|\vec{n}|^2} = \sqrt{13}.$$

**164.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 3; -1)$ и перпендикулярной к прямой, которой принадлежат точки $B(1; 0; -1)$, $C(-3; 1; -2)$.

Решение. Искомая плоскость перпендикулярна к вектору $\vec{BC} = (-4; 1; -1)$, поэтому ее уравнение имеет вид

$$-4x + y - z + D = 0. \qquad (14)$$

Чтобы найти $D$, используем то, что плоскость проходит через точку $A$ и, следовательно, ее координаты удовлетворяют уравнению (14). Далее имеем

$$(-4 \cdot 2 + 3 - (-1) + D = 0) \Rightarrow (D = 4),$$

и уравнение плоскости имеет вид

$$-4x + y - z + 4 = 0.$$

**165.** Найти расстояние между параллельными плоскостями

$$2x - 3y + 6z + 8 = 0 \text{ и } 2x - 3y + 6z - 6 = 0.$$

Решение. Выберем на первой плоскости произвольную точку $A(-4; 0; 0)$ и найдем расстояние от этой точки до второй плоскости:

$$d = \left| \frac{2(-4) - 6}{\sqrt{4 + 9 + 36}} \right| = \frac{14}{7} = 2.$$

Это и есть расстояние между параллельными плоскостями.

**166.** Доказать, что треугольник с вершинами $A(1; 2; -3)$, $B(3; 1; -2)$, $C(4; -1, -12)$ прямоугольный.

**167.** Даны точки $M_1(0; -1; 3)$, $M_2(1; 3; 5)$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1$ перпендикулярно к вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

**168.** Найти расстояние точки $A(5; 1; -1)$ от плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

**169.** Найти проекцию медианы $AM$ треугольника $ABC$ на сторону $AB$, если известны координаты вершин треугольника:

$$A(1; 2; -3), \quad B(3; 0; -1), \quad C(2; 4; 5).$$

**170.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; 2; -2)$ параллельно плоскости $2x + y + 3z = 5$.

**171.** Найти угол $A$ треугольника $ABC$ ($A(0; 0; 1)$, $B(1; 1; 2)$, $C(2; 3; -1)$).

**172.** Найти углы треугольника $ABC$ ($A(2; -1; 8)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$).

## ГЛАВА XVIII

## ВАРИАНТЫ ДЛЯ ПИСЬМЕННОГО ЭКЗАМЕНА ПО МАТЕМАТИКЕ

Приведем образец решения варианта для письменного экзамена по математике.

**В — 0**

**1.** Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2 \times \right.$

$\left. \times \sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right) - a^{\frac{2}{3}}$.

**2.** На поверхности сферы радиуса $R$ лежат все вершины равнобедренной трапеции, у которой меньшее основание конгруэнтно боковой стороне, а острый угол равен $\alpha$. Найти расстояние от центра шара до плоскости трапеции, если большее основание трапеции конгруэнтно радиусу шара.

3. Решить неравенство $|\log_2 x - 1| + 1 > |\log_2 (x - 1) + 1|$.

4. Решить уравнение $\operatorname{cosec}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 3$.

5. К гиперболе $y = \frac{4}{x}$ проведена касательная параллельно прямой $y = -4x$. Найти площадь треугольника, образованного этой касательной с осями координат.

Решение.

1. Выполним преобразования:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(\frac{\sqrt[3]{a} - 2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}}\right) - a^{\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{2}{3}}(a-8b)}{a-8b} - a^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}} = 0.$$

*Ответ:* 0 при $a \neq 8b$, $a \neq 0$.

2. Дано: $|OA| = R$, $|AD| = R$, $\overset{\frown}{BAD} = \overset{\frown}{CDA} = \alpha$, $|AB| = |BC| = |CD|$ (рис. 104). В задаче требуется найти $|OK|$. Из прямоугольного треугольника $OKA$ ($[OK] \perp [KA]$, так как $[OK]$ перпендикулярно к плоскости трапеции) находим $|OK| = \sqrt{R^2 - |KA|^2}$. Здесь $|KA| = r$ — радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$. Так как $|BC| = |CD|$, то равны соответствующие дуги, и поскольку $\overset{\smile}{BCD} = 2\alpha$ (как дуга, на которую опирается $\overset{\frown}{BAD} = \alpha$), то $\overset{\smile}{CD} = \alpha$. Проведем диагональ $AC$ и рассмотрим треугольник $ACD$:

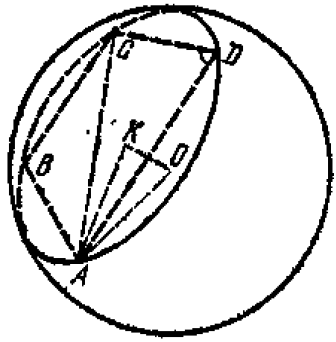


Рис. 104

$$\overset{\frown}{CAD} = \frac{\alpha}{2}; \quad \overset{\frown}{ACD} = \pi - \left(\alpha + \frac{\alpha}{2}\right) = \pi - \frac{3\alpha}{2}.$$

Используя теорему синусов, находим

$$\left(\frac{|AD|}{\sin\left(\pi - \frac{3\alpha}{2}\right)} = 2r\right) \Rightarrow \left(\frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}} = 2r\right) \Rightarrow \left(r = \frac{R}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}\right).$$

Теперь получим

$$|OK| = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}\right)^2} = \frac{R}{2\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{4\sin^2\frac{3\alpha}{2} - 1}.$$

Подкоренное выражение преобразуем в произведение:

$$4\sin^2\frac{3\alpha}{2} - 1 = 2(1 - \cos 3\alpha) - 1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos 3\alpha\right) =$$

$$= 4\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right).$$

*Ответ:* $|OK| = \frac{R}{\sin\frac{3\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{3\alpha}{2} - \frac{\pi}{6}\right)}.$

**3.** Решая систему неравенств $\begin{cases} x > 0, \\ x - 1 > 0, \end{cases}$ находим область определения $x > 1$. Неравенство решаем методом интервалов с учетом области определения. Приравниваем все модули к нулю и получаем

$$(|\log_2 x - 1| = 0) \Leftrightarrow (\log_2 x = 1) \Leftrightarrow (x = 2);$$

$$(|\log_2(x-1) + 1| = 0) \Rightarrow (\log_2(x-1) = -1) \Leftrightarrow \left(x = \frac{3}{2}\right).$$

Рис. 105

Исследуем данное неравенство в полученных интервалах с учетом области определения (рис. 105):

а) $x \in \left]1;\ \frac{3}{2}\right[$, тогда

$$|\log_2 x - 1| = -(\log_2 x - 1); \quad |\log_2(x-1) + 1| = -(\log_2(x-1) + 1),$$

и получим цепочку неравенств

$$(\log_2(x-1) + 1 + 1 > \log_2 x - 1) \Rightarrow (\log_2(x-1) - \log_2 x > -3) \Rightarrow \left(\log_2\frac{x-1}{x} > -3\right) \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{x} > \frac{1}{8}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{7}{8} > \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \left(x > \frac{8}{7}\right),$$

т. е. решение для первого интервала имеет вид

$$x \in \left]\frac{8}{7};\ \frac{3}{2}\right[;$$

б) $x \in \left[\frac{3}{2};\ 2\right[$, тогда $|\log_2 x - 1| = -(\log_2 x - 1)$,

$$|\log_2 (x-1) + 1| = \log_2 (x-1) + 1,$$

и получаем

$$(\log_2 (x-1) + 1 + \log_2 x - 1 < 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\log_2 (x-1)\, x < 1) \Rightarrow ((x-1)\, x < 2) \Rightarrow (x^2 - x - 2 < 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x \in ]-1;\ 2[).$$

Находя пересечение множеств $\left[\frac{3}{2};\ 2\right[ \cap ]-1;\ 2\left[$, получаем решение во втором интервале:

$$x \in \left[\frac{3}{2};\ 2\right[;$$

в) $x \in [2;\ +\infty[$, тогда $|\log_2 x - 1| = \log_2 x - 1$,

$$|\log_2 (x-1) + 1| = \log_2 (x-1) + 1,$$

и получаем

$$(\log_2 x - 1 + 1 > \log_2 (x-1) + 1) \Rightarrow \left(\log_2 \frac{x}{x-1} > 1\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left(\frac{x}{x-1} > 2\right) \Rightarrow \left(\frac{2-x}{x-1} > 0\right) \Rightarrow (1 < x < 2) \Leftrightarrow (x \in ]1;\ 2[).$$

Решение $x \in ]1;\ 2[$ противоречит условию $x \in [2;\ +\infty[$.

Таким образом, все решения исходного неравенства имеют вид

$$\left(x \in \left]\frac{8}{7};\ \frac{3}{2}\right[ \cup \left[\frac{3}{2};\ 2\right[\right) \Rightarrow \left(x \in \left]\frac{8}{7};\ 2\right[\right).$$

*Ответ:* $x \in \left]\frac{8}{7};\ 2\right[$.

**4.** Перенесем $\operatorname{ctg}^3 x$ в правую часть уравнения, возведем обе части в квадрат и выполним преобразования:

$$(\operatorname{cosec}^6 x = (3 - \operatorname{ctg}^3 x)^2) \Rightarrow ((1 + \operatorname{ctg}^2 x)^3 = 9 - 6\operatorname{ctg}^3 x +$$
$$+ \operatorname{ctg}^6 x) \Rightarrow (3\operatorname{ctg}^4 x + 6\operatorname{ctg}^3 x + 3\operatorname{ctg}^2 x - 8 = 0).$$

Производя подстановку $\operatorname{ctg} x = t$, получим

$$(3t^4 + 6t^3 + 3t^2 = 8) \Rightarrow (3t^2 (t+1)^2 = 8) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left((t(t+1))^2 = \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \left(t(t+1) = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}\right).$$

Уравнение $t^2+t+\sqrt{\frac{8}{3}}=0$ не имеет действительных корней, а уравнение $t^2+t-\sqrt{\frac{3}{3}}=0$ имеет корни $t=$ $=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{8}{3}}}$. Тогда

$$\left(\operatorname{ctg}x=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{8}{3}}}\right)\Rightarrow\left(x=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\pm\right.\right.$$
$$\left.\left.\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{8}{3}}}\right)+n\pi\right).$$

Теперь необходимо проверить полученные решения, так как при решении данного уравнения возводили обе части уравнения в квадрат. Если $n=2m+1$, $m\in Z$, то $x$ будет находиться в третьей или четвертой четверти, где $\operatorname{cosec}x<0$. Поскольку $|\operatorname{cosec}x|>|\operatorname{ctg}x|$, то левая часть исходного уравнения будет отрицательна, что противоречит условию. При четных $n$ ($n=2m$, $m\in Z$) $x$ находится в первой или второй четверти, где $\operatorname{cosec}x>0$, и найденные значения $x$ удовлетворяют уравнению.

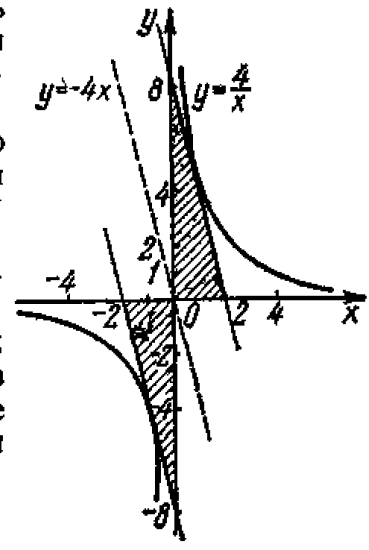


Рис. 106

*Ответ:* $x=\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\pm\right.$
$\left.\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\sqrt{\frac{8}{3}}}\right)+2\pi m.$

5. Так как угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке касания, то получим

$$\left(-\frac{4}{x^2}=-4\right)\Rightarrow(x^2=1)\Rightarrow(x=\pm1).$$

Следовательно, точки $A(1;\ 4)$ и $B(-1;\ -4)$ являются точками касания (рис. 106). Уравнение касательной, проведенной через точку $A$, имеет вид: $y-4=-4(x-1)$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $C(0;\ 8)$ и $D(2,\ 0)$. Площадь треугольника $COD$ равна $S_1=\frac{1}{2}|CO|\cdot|OD|=8$. Аналогично находим уравнение другой касательной, про-

веденной через точку $B$: $y+4=-4(x+1)$ и точки ее пересечения с осями координат $C_1(0;\ -8)$, $D_1(-2;\ 0)$. Площадь треугольника $C_1OD_1$ равна $S_2=\frac{1}{2}|C_1O|\times\times|OD_1|=8$.

*Ответ:* $S_1=S_2=8$.

**В — 1**

1. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{2b-2\sqrt{b^2-4}}}{\sqrt{b^2-4}-(b+2)}$, $b>2$.

2. Боковые грани пирамиды, основанием которой служит равнобедренная трапеция с высотой $h$, одинаково наклонены к плоскости основания. Из вершины пирамиды опущены перпендикуляры на боковые стороны трапеции и основания их соединены. В полученном треугольном сечении угол при вершине равен $\alpha$, а площадь сечения равна $S$. Определить объем пирамиды. При каком значении $h$ этот объем будет наибольшим, если $S$ и $\alpha$ постоянны?

3. Решить уравнение $2^x+12\cdot 2^{-x}=9{,}5$.

4. Решить уравнение $(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$.

5. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y=\frac{2}{3}x^3-\frac{x^3}{9}$, проведенная в точке с абциссой $x=1$.

**В — 2**

1. Упростить выражение $A=x+2+\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+8x+16}$.

2. Конус и цилиндр имеют общее основание. Вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Определить угол между осью конуса и его образующей, если полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7 : 4.

3. Решить неравенство $(x-2)^{x^2-6x+8}>1$.

4. Решить уравнение $2\sin^2 x+\sin^2 2x=2$.

5. Найти наибольшее значение функции $f(x)=\cos x\times\times\sqrt{\sin x}$ в промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$.

**В — 3**

1. Дано: $a+b+c=0$, $a^2+b^2+c^2=1$; вычислить $a^4+b^4+c^4$.

2. Сторона треугольника равна $a$. Разность прилегающих к ней углов равна $\varphi$. На треугольнике, как на основании, построена прямая призма. Через ребро призмы, противоположное стороне $a$, проведено сечение площади $S$, которое делит двугранный угол пополам. Определить объем призмы.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \lg(x-3) > 1$.

4. Вычислить $\dfrac{\sin^5 x + \cos^5 x + \sin x}{\sin^3 x + \cos^3 x}$, если $\operatorname{tg} x = 2$.

5. Вычислить $\int\limits_{1,2\pi}^{1,6\pi} 4{,}2 \sin\left(\frac{x}{7} - \frac{\pi}{5}\right) \cos\left(\frac{\pi}{5} - \frac{x}{7}\right) dx$.

**В — 4**

1. Доказать тождество

$$\frac{1}{x(x-y)(x-z)} + \frac{1}{y(y-z)(y-x)} + \frac{1}{z(z-x)(z-y)} = \frac{1}{xyz}.$$

2. Сфера вписана в конус с углом $\alpha$ при вершине осевого сечения. В эту сферу вписан конус с таким же углом при вершине осевого сечения. Найти угол $\alpha$, если отношение объема первого конуса к объему второго равно $a$.

3. Решить уравнение $1 + \log_x(2 \lg a - x) = 2 \log_x b$.

4. Решить уравнение $\frac{\operatorname{tg} x}{3} + \operatorname{ctg} x = \operatorname{cosec} x$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \cos^2 \frac{x}{2} \sin x, \quad x \in [0;\ \pi].$$

**В — 5**

1. Упростить выражение

$$\frac{(x-y)^2 (\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-2} + 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{y}}{x\sqrt{x} + y\sqrt{y}} + \frac{3(\sqrt{xy} - x)}{x - y}, \quad x > 0,$$
$$y > 0, \quad x \neq y.$$

2. В правильной шестиугольной пирамиде с плоским углом при вершине, равным $\alpha$, проведено сечение через наибольшую диагональ основания под углом $\beta$ к нему. Найти отношение площади сечения к площади основания.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_2(x-y) = 1, \\ x^2 - y^2 = 2. \end{cases}$$

4. Решить уравнение $2\cos^2(80^\circ - x) + \cos 2x = 1 + \sin 20^\circ$.

5. Найти наименьшее значение функции $y = \sec^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 1$.

**В — 6**

1. Выполнить действия

$$\left(\sqrt{a} + \frac{b - \sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}\right) : \left(\frac{a}{\sqrt{ab} + b} + \frac{b}{\sqrt{ab} - a} - \frac{a + b}{\sqrt{ab}}\right),$$
$$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b.$$

2. В правильную треугольную пирамиду, сторона основания которой равна $a$, вписан конус. Найти объем конуса, если площадь боковой поверхности пирамиды в пять раз больше площади ее основания.

3. Решить неравенство $\frac{1 - \sqrt{8x - 3}}{2x} \leqslant 1$.

4. Решить уравнение $2\sqrt{3\sin x} = \frac{3\operatorname{tg} x}{2\sqrt{\sin x - 1}} - \sqrt{3}$.

5. Найти основание равнобедренного треугольника наибольшей площади, у которого боковая сторона равна $a$.

**В — 7**

1. Выполнить действия

$$\left(\frac{m + \sqrt{m^2 - n^2}}{m - \sqrt{m^2 - n^2}} - \frac{m - \sqrt{m^2 - n^2}}{m + \sqrt{m^2 - n^2}}\right) : \frac{4m\sqrt{m^2 - n^2}}{n^2},\ |m| > |n| > 0.$$

2. В конус вписан шар. Найти угол при основании осевого сечения конуса, если известно, что окружность, по которой поверхность шара касается боковой поверхности конуса, делит последнюю пополам.

3. Решить неравенство $\lg 2 + \lg(2x - x^2) > \lg(1 + x^2)$.

4. Решить уравнение $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x = 2$.

5. Найти экстремальные значения функции $y = x + \ln(1 - 2x)$.

**В — 8**

1. Упростить выражение

$$\left(2\sqrt{\frac{2}{a}}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2a} - \sqrt[4]{b}} + \frac{\sqrt[4]{9 - 4\sqrt{5}}\sqrt{2 + \sqrt{5}}}{\sqrt[4]{2a} + \sqrt[4]{b}}\right)^{-2}\right) :$$
$$: \left(1 + \frac{b}{2a} - 2\sqrt{\left(\frac{2a}{b}\right)^{-1}}\right),\ a > 0,\ b > 0,\ b \neq 2a.$$

2. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна $a$. Плоскость, проходящая через вершину ко-

нуса и одну из сторон этого квадрата, дает в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен $\alpha$. Определить объем конуса.

3. Решить уравнение $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

4. Решить уравнение $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$.

5. При каком значении $x$ функция $y = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ принимает наименьшее значение?

**В — 9**

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{(a+3)\sqrt{a}-3a-1}\right)^2 : \left(\frac{a-1}{2(\sqrt{a}+1)}+1\right),\ a\geqslant 0.$$

2. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной $a$. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания и образуют между собой тупой угол $\beta$; две другие боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\alpha$. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Решить уравнение $5^{\sqrt{\log_2(x^2+x-1)}} = 2^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x-1}}(x-1)-1}$.

4. Решить уравнение $\sin^2 2x - \sin^2 x = \frac{1}{4}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-2}$.

**В — 10**

1. Упростить выражение

$$x^3\left(\frac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\right)^5\cdot\sqrt[3]{x\sqrt{x}},\ x>0,\ y>0.$$

2. Найти двугранный угол между основанием и боковой гранью правильной четырехугольной пирамиды, зная, что радиус описанного около пирамиды шара в три раза больше радиуса вписанного в нее шара.

3. Найти решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^4+y^4-(xy)^2=13, \\ x^2-y^2+2xy=1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $xy\geqslant 0$.

4. Доказать, что $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \sqrt{3}$.

5. Найти первообразную для функции $f(x) = x^{-4}$, график которой проходит через точку $M(2; -3)$.

**В — 11**

1. Упростить выражение

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^2-2ab+b^2}{a+b}}+\sqrt[3]{\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}}\right):\left(\frac{a^2}{\sqrt[3]{a+b}}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{a}{b^6}+\frac{1}{b^2}}}\right),\ a^2 \neq b^2.$$

2. Расстояние от вершины основания правильной треугольной пирамиды до противоположной боковой грани равно $b$. Угол между боковой гранью и плоскостью основания пирамиды равен $\alpha$. Найти площадь полной поверхности конуса, вписанного в эту пирамиду. При каком значении $\alpha$ эта площадь будет минимальной, если $b$ постоянно?

3. Решить уравнение $1 + \sin x = \operatorname{tg} x$.

4. Доказать тождество $\sin 2\alpha + \sin 4\alpha - \sin 6\alpha = 4 \sin \alpha \times \sin 2\alpha \sin 3\alpha$.

5. Найти объем тела, образованного вращением вокруг оси $Ox$ дуги параболы $y = 2\sqrt{x}$, соединяющей точки $A(0; 0)$ и $B(4; 4)$.

**В — 12**

1. Упростить выражение

$$\frac{1-\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{1+\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}\cdot\sqrt{\frac{a+b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}{a-b\sqrt{\frac{2a}{b}-1}}},\ 2a>b>0,\ a>b.$$

2. В конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$, вписан шар. Определить расстояние от вершины конуса до плоскости того круга, по окружности которого поверхность шара касается боковой поверхности конуса. Площадь основания конуса равна $S$.

3. Решить уравнение $5^{\lg x} = 50 - x^{\lg 5}$.

4. Решить уравнение $x^6 \cdot 11^{\sqrt[\log_5 11]{5}} = 5^{-\log_{\frac{1}{x}} 5}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3 + 1$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$.

**В — 13**

1. Упростить выражение $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$.

2. В треугольной пирамиде две боковые грани равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны $c$ и образуют между собой угол $\alpha$. Определить объем пирамиды. При каком значении $\alpha$ этот объем будет наибольшим, если $c$ постоянно?

3. Решить уравнение $\sin 2x \cos x - \cos x = -\sin x (1 + \cos 2x)$.

4. Решить уравнение $\sqrt{\log_9 (9x^3) \log_3 (9x)} = \log_3 x^3$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $y = 2x$.

**В — 14**

1. Упростить выражение $\sqrt{a^2 + 2\sqrt{2a^2 - 4}} + \sqrt{a^2 - 2\sqrt{2a^2 - 4}}$.

2. В основании прямой призмы лежит равносторонний треугольник. Плоскость, которая проходит через одну из сторон нижнего основания и противолежащую вершину верхнего основания, наклонена к основанию под углом $\alpha$. Площадь этого сечения равна $S$. Найти объем призмы. При каком значении $\alpha$ этот объем будет наибольшим, если $S$ постоянно?

3. Решить уравнение $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin 2x$.

4. Решить уравнение $\operatorname{arctg}(x + 2) - \operatorname{arctg}(x + 1) = \frac{\pi}{4}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^3 + 3x - 28 - 3x^2}{x^2 - 2x - 8}$.

**В — 15**

1. Упростить выражение

$$\frac{2a(a + 2b + \sqrt{a^2 + 4ab})}{(a + \sqrt{a^2 + 4ab})(a + 4b + \sqrt{a^2 + 4ab})}.$$

2. Через вершину конуса проведена плоскость, делящая окружность основания в отношении $p : q$. Эта плоскость отстоит от центра основания конуса на расстоянии, равном $a$, и составляет с высотой конуса угол, равный $\alpha$. Найти объем конуса. При каком значении $\alpha$ объем конуса будет наименьшим, если $a$, $p$, $q$ постоянны?

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x(3x+2y)=2,\\ \log_y(2x+3y)=2.\end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\cos x\cos 2x\cos 4x\cos 8x=\frac{1}{8}\cos 15x.$$

5. Найти величину внутреннего угла $B$ треугольника с вершинами $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$.

**В — 16**

1. Упростить выражение

$$\frac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}},\quad a\geqslant b>0.$$

2. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, вписанный в основание конуса. Вершина пирамиды совпадает с вершиной конуса; боковые грани пирамиды, содержащие катеты основания, образуют с плоскостью основания углы $\alpha$ и $\beta$. Найти отношение объема пирамиды к объему конуса.

3. Решить неравенство $\sqrt{x^2-x-2}>5-2x$.

4. Решить уравнение $\cos(20^\circ+x)+\cos(100^\circ-x)=\frac{1}{2}$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x-2}{x^6+x^3-x-1}$.

**В — 17**

1. *Упростить выражение*

$$\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1\right)-(\sqrt{x^2+1}-x)\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1\right)}{(\sqrt{x^2+1}+x)(\sqrt{x^2+1}-x)}.$$

2. Конус описан около двух касающихся шаров, из которых объем одного в 8 раз больше объема другого. Радиус меньшего шара равен $r$. Найти площадь боковой поверхности и объем конуса.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(3x+y)^{x-y}=9,\\ \sqrt[x-y]{324}=18x^2+12xy+2y^2.\end{cases}$$

4. Решить уравнение $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 6x - x^2$, $y = 6 - x$.

**В — 18**

1. Упростить выражение

$$\frac{x^{2,5} - x^{-0,5}}{(x+1)(x^2+1)} - \left(x - \frac{x^3}{1+x^2}\right)^{-0,5} \cdot \frac{x^2(\sqrt{1+x^2})^{-2} - \sqrt{1+x^2}}{1+x^2}.$$

2. Трапеция с большим основанием $a$ и острым углом $\alpha$ служит основанием пирамиды, у которой грань, проходящая через основание $a$, перпендикулярна к плоскости основания. Найти объем пирамиды, если все боковые ребра ее наклонены под углом $\beta$ к плоскости основания.

3. Решить уравнение $\log_x 5\sqrt{5} - \frac{5}{4} = (\log_x \sqrt{5})^2$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x - \sin 2x - \cos 2x + 2(2\cos x - \sec x) = 0$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$.

**В — 19**

1. Выполнить действия

$$\left(\sqrt[3]{(x^2+1)\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} + \sqrt[3]{(x^2-1)\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right)^{-2},$$

$|x| > 1$.

2. Радиус основания конуса равен $r$, а образующая наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом $\beta$ к его высоте. Найти площадь полученного сечения.

3. Решить уравнение $4\cos^2 x - 2 = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

4. Решить уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.

5. Вычислить $\lim\limits_{x \to 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$.

**В — 20**

1. Упростить выражение $\frac{x}{\sqrt[4]{(x^2 + x^{-2})^4 - 4(x + x^{-1})^2 + 12}} - \frac{1}{x^2 - 1}$.

2. Объем шара равен $V$. Определить объем шарового сектора, если известно, что его центральный угол равен $\alpha$.

3. Решить уравнение $\sqrt{6}\sin x \cos x = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x)$.

4. Решить уравнение $\log_{a^2} x + \log_{x^2} a = 1$, $a > 0$, $a \neq 1$.

5. Вычислить длины диагоналей параллелограмма $ABCD$, если известны координаты точек $A(1; -3; 0)$, $B(-2; 4; 1)$, $C(-3; 1; 1)$.

**В — 21**

1. Упростить выражение

$$\frac{2}{(x+1)\sqrt{x+1}+(x-1)\sqrt{x-1}} \cdot \frac{\frac{2x}{\sqrt{x-1}}-\sqrt{x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x-1}}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}}.$$

2. Расстояния от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра соответственно равны $a$ и $b$. Найти двугранный угол при основании пирамиды.

3. Решить неравенство $\log_{0.5} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$.

4. Решить уравнение $(3 - \operatorname{tg}^2 x)(\cos 3x + \cos x) = \frac{4\cos 3x}{\operatorname{tg} 2x}$.

5. Определить, при каком $\alpha$ векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ перпендикулярны.

**В — 22**

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(2\sqrt{b})^2}{a-b}-\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right):\frac{(4b)^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}},$$

$$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b.$$

2. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $H$. Перпендикуляр, опущенный из центра шара, описанного около пирамиды, на ее боковую грань, образует с высотой угол $\alpha$. Определить объем шара.

3. Решить уравнение

$$3\operatorname{tg} 2x - 4\operatorname{tg} 3x = \operatorname{tg}^2 3x \operatorname{tg} 2x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_x 10 + \log_y 10 = 5, \\ \lg x + \lg y = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

5. Вычислить $\int_2^3 \frac{(x+1)\,dx}{x^2-4x}$.

## В — 23

1. Упростить выражение

$$\frac{a-b}{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{b^3}}:\left(\frac{1}{\sqrt[4]{a}}+\frac{1}{\sqrt[4]{b}}\right).$$

2. Найти центральный угол в осевом сечении шарового сектора, если площадь его шаровой поверхности равновелика конической.

3. Решить уравнение $8\sin^2 x + 6\cos^2 x = 13\sin 2x$.

4. Решить уравнение $\sin(\pi\cos x) - \cos(\pi\sin x) = 0$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-7x+12}$.

## В — 24

1. Упростить выражение $\dfrac{a^2+1}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-1}{2a}\right)^2+1}}$, $a \neq 0$.

2. В шаровой сектор радиуса $R$ вписан шар. Найти радиус окружности касания поверхностей шара и сектора, если центральный угол в осевом сечении шарового сектора равен $\alpha$.

3. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) > \log_2(2-x)$.

4. Решить уравнение $4^{\log_{\frac{1}{2}}(\sin^2 x+5\sin x\cos x+5)} = \frac{1}{9}$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$.

## В — 25

1. Упростить выражение

$$\left(\sqrt{\frac{(1-a)\sqrt[3]{1+a}}{a}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3a^2}{4-8a+4a^2}}\right)^{-1}:\sqrt[-3]{\frac{3a\sqrt{a}}{2\sqrt{1-a^2}}},$$

$0 < a < 1$.

2. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину $a$. Из трех плоских углов, образованных при вершине пирамиды этими ребрами, два равны $\alpha$, а третий $\beta$. Найти объем пирамиды.

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}(2\pi t^2) + \operatorname{ctg}(4\pi t) = 0$.

4. Решить систему

$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y} = 2\sqrt{3},\\ (x+y)\cdot 2^{y-x} = -\log_2\frac{1}{8}.\end{cases}$$

5. Объем открытого цилиндрического бака равен $V$, а радиус его основания равен $R$. При каком $R$, если $V$ постоянно, площадь поверхности бака будет наименьшей?

**В — 26**

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}\right)\frac{x^4y^4}{xy+y^2}\cdot\frac{\frac{x}{y}-1+\frac{y}{x}}{x^3-2x^2y+xy^2},\quad x^2\neq y^2\neq 0.$$

2. Образующая конуса имеет длину $l$ и составляет с высотой конуса угол, равный $\alpha$. В конус вписана правильная шестиугольная призма с равными длинами ребер (основание призмы лежит в плоскости основания конуса). Вычислить поверхность призмы. При каком значении $\alpha$ эта поверхность будет наибольшей, если $l$ постоянно?

3. Решить уравнение $\operatorname{cosec} 5x-\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\lg^2 x+\lg^2 y=7,\\ \lg x-\lg y=2.\end{cases}$$

5. Доказать, что треугольник с вершинами $A(0;\ 0)$, $B(3;\ 1)$, $C(1;\ 7)$ — прямоугольный.

**В — 27**

1. Упростить выражение

$$(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}):\left(\sqrt[3]{\frac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt[3]{a^2}}}+\sqrt[2]{\frac{\sqrt{a}}{a\sqrt[3]{b^2}}}\right),\quad a>0,\ b>0.$$

2. В конус вписан цилиндр, высота которого равна радиусу основания конуса. Найти угол между осью конуса и его образующей, если площадь полной поверхности цилиндра относится к площади основания конуса как $3:2$.

3. Решить уравнение

$$1+\sin 2x+2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos 3x=2\sin x+2\cos 3x+\cos 2x.$$

4. Решить уравнение

$$2(\log_b x\log_{a^2}3+\log_a x\log_b a)=\log_{a^2}x\log_b x.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=|9-x^2|$, $x=-5$, $x=5$, $y=0$.

**В—28**

1. Упростить выражение

$$\left((ab)^{\frac{1}{4}}-b^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}\left(\left(\frac{1}{ab}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{ab}{a+\sqrt{ab}}\right):\frac{a^{\frac{5}{4}}+(a^4b)^{\frac{1}{4}}}{a-b},$$

$a>0$, $b>0$.

2. Расстояния от центра основания правильной четырехугольной пирамиды до боковой грани и до бокового ребра соответственно равны $a$ и $b$. Определить объем пирамиды.

3. Решить неравенство $\sqrt{x^6}>2\sqrt{x^3-2x+1}$.

4. Решить уравнение $9^{1-\cos 6x}=\sqrt[\operatorname{ctg}^3 x]{3}$.

5. Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}-2\vec{n}$, где $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $(\vec{m},\ \vec{n})=\frac{\pi}{3}$.

**В—29**

1. Упростить выражение $\sqrt{x^2-12x+36}-\sqrt{x^2}$.

2. Найти объем параллелепипеда, если все его грани — ромбы со стороной 4 см и острым углом 30° (острые углы сходятся в одной вершине).

3. Решить уравнение $2\sin^2 2x\cos 2x=\sin^2 3x$.

4. Решить уравнение $6\sqrt[x]{9}-13\sqrt[x]{6}+6\sqrt[x]{4}=0$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5}}{2x-8}$.

**В—30**

1. Упростить выражение

$$\frac{(a^{\frac{3}{2}}-\sqrt{8})(\sqrt{a}+\sqrt{2})}{a+\sqrt{2a}+2}+\sqrt{(a^3+2)^2-8a^2}.$$

2. Из вершины $S$ правильной четырехугольной пирамиды на основание опущен перпендикуляр $SO$. Из середины $K$ отрезка $SO$ опущены перпендикуляр $KM$ длиной $a$ на боковое ребро и перпендикуляр $KN$ длиной $b$ на боковую грань. Найти объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots = \frac{1}{2}, \quad x \in ]0;\ 8[.$$

4. Преобразовать в произведение

$$\sqrt{\operatorname{tg}\alpha + \sin\alpha} + \sqrt{\operatorname{tg}\alpha - \sin\alpha}, \quad \operatorname{tg}\alpha > 0.$$

5. Найти угол, который образует с осью ординат касательная к кривой $y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3$, проведенная в точке с абсциссой $x = 1$.

**В—31**

1. Упростить выражение

$$\frac{x + \sqrt{x} - \sqrt[4]{12x} + 3 + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3} - \sqrt[4]{12x}} - (\sqrt{3} + \sqrt[4]{12x}), \quad x \geqslant 0.$$

2. Основанием прямой призмы служит ромб $ABCD$ со стороной $a$ и углом 60°. Вершины $B_1$ и $D_1$ верхнего основания призмы соединены прямыми $B_1E$ и $D_1F$ с серединами сторон $AD$ и $AB$ нижнего основания. В пересечении этих прямых образуется угол $B_1OD_1$ ($\angle B_1OD_1 = \alpha$). Найти объем призмы.

3. Решить уравнение $\sqrt{2\lg(-x)} = \lg\sqrt{x^2}$.

4. Доказать тождество

$$\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 175^\circ = -\frac{1 + \sqrt{3}}{8\sqrt{2}}.$$

5. Найти расстояние от точки $A(5;\ 1;\ -1)$ до плоскости $x - 2y - 2z + 4 = 0$.

**В—32**

1. Упростить выражение

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{3}{4}} - (\sqrt{a^3 + 2a^2} + \sqrt[4]{a(a+2)^2})}{\sqrt{2(a + 1 - \sqrt{a^2 + 2a})}\,(a^2 - a^{\frac{5}{4}} + a^{\frac{1}{2}})^{-1}}, \quad a > 0.$$

2. Боковая грань правильной усеченной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом $\alpha$. Площадь нижнего основания пирамиды в 9 раз больше площади верхнего основания, а ее объем равен $V$. Определить площадь боковой поверхности пирамиды.

3. Решить уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = \operatorname{tg} x \cos 2x$.

4. Упростить выражение $\dfrac{a^{\frac{4}{3}} - 8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}} + 2\sqrt[3]{ab} + 4b^{\frac{2}{3}}} : \left(1 - 2\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\right)$.

5. Даны точки $A(3;\ 3;\ -2)$, $B(0;\ -3;\ 4)$, $C(0;\ 3;\ 0)$, $D(0;\ 2;\ -4)$. Найти $\operatorname{пр}_{\overrightarrow{AB}} \overrightarrow{CD}$.

**В—33**

1. Упростить выражение $\dfrac{(1 - ax)\sqrt{1 + bx}}{(1 + ax)\sqrt{1 - bx}}$, где $x = \dfrac{1}{a}\sqrt{\dfrac{2a}{b} - 1}$.

2. В параллелепипеде длины трех ребер, исходящих из одной вершины, равны $a$, $b$, $c$. Первые два ребра взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них угол $\alpha$. Найти объем параллелепипеда.

3. Решить уравнение $\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$.

4. Преобразовать в произведение

$$2\cos 20^\circ \sin 80^\circ - 2\sin 60^\circ + \cos 50^\circ.$$

5. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;\ 3;\ -1)$ и перпендикулярной к прямой $BC$, где $B(1;\ 0;\ -1)$, $C(-3;\ 1;\ -2)$.

**В—34**

1. Упростить выражение

$$\left(\sqrt[3]{\frac{a^5 + 2a^4b + 4a^3b^2}{a^3 - 4ab + 4b^2}} + \sqrt[3]{8b^3 - \left(\frac{1}{a}\right)^{-3}}\right) : \left(\frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} - b\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2b}}{\sqrt{ab} + b\sqrt{2}}\right).$$

2. В конус с радиусом основания $R$ и углом $\alpha$ между образующей и плоскостью основания вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Вычислить объем призмы.

3. Решить уравнение $\log_x \sqrt{5} + \log_x (5x) - \frac{3}{2} = \log_x^2 5$.

4. Доказать, что если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{1}{4}(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma).$$

5. Найти угол между плоскостями $2x+3y+6z=5$, $4x+4y+2z=7$.

**В—35**

1. Упростить выражение

$$\frac{((a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}})^{-1}+((a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}})^{-1}}{((a+b)^{-\frac{1}{2}}+(a-b)^{-\frac{1}{2}})^{-1}-((a+b)^{-\frac{1}{2}}-(a-b)^{-\frac{1}{2}})^{-1}},$$

$$a>b>0.$$

2. Диагональ параллелограмма образует с его сторонами углы $\alpha$ и $\beta$. Большая сторона равна $a$. Найти площадь поверхности тела, образованного вращением этого параллелограмма вокруг большей стороны.

3. Решить уравнение

$$\sin 2x\cos x-\cos x=\sin x(1+\cos 2x).$$

4. Доказать тождество

$$\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)=\sin^2\beta.$$

5. Найти угол между плоскостями $3x-y+2z=5$, $x+y+z=1$.

**В—36**

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{10x^2+3ax}{4x^2-a^2}+\frac{bx-x^2-ax+ab}{(2x+a)(b-x)}-2\right)\times$$

$$\times\frac{((a+2x)^{-\frac{1}{2}}+(2x-a)^{-\frac{1}{2}})^2}{2x(4x^2-a^2)^{-\frac{1}{2}}+1},\quad 2x>a>0.$$

2. Дан конус с радиусом основания, равным $R$, и шар, центром которого служит вершина конуса. Угол при вершине осевого сечения конуса равен $\alpha$. Поверхность шара делит конус на две равные по объему части. Найти радиус шара.

3. Решить уравнение $\log_8 8^{x-1}\cdot\log_2 27=x+7$.

4. Решить уравнение $\sqrt[4]{(x-3)^{x+1}}=\sqrt[13]{(x-3)^{x-2}}$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$, если $x \in [-2; 2]$.

**В—37**

1. Решить уравнение $\operatorname{tg} 2t = \operatorname{ctg} t - 4\cos t \cos 3t$.

2. Радиус основания конуса равен $r$, а боковая поверхность равна сумме площадей основания и осевого сечения. Определить объем конуса.

3. Решить неравенство $\frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} \leqslant \frac{1}{2}$.

4. Решить уравнение $\log_{x+3}(3 - \sqrt{1 - 2x + x^3}) = \frac{1}{2}$.

5. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{k}$.

**В—38**

1. Решить уравнение $\sqrt{1 - 2\sin 4x} + \sqrt{6}\cos 2x = 0$.

2. Радиус основания конуса равен $r$. Две взаимно перпендикулярные образующие делят боковую поверхность конуса на части, площади которых относятся как 1 : 2. Найти объем конуса.

3. Решить неравенство $\log_5(1 + \log_{\frac{1}{4}} x) < 1$.

4. Решить уравнение

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \ldots \log_n (n + 1) = 10.$$

5. Найти экстремальные значения функции $y = \frac{x}{x^3 + 2}$.

**В—39**

1. Решить уравнение $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.

2. Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину и равны $l$. Из трех плоских углов, образованных этими ребрами при вершине пирамиды, два равны $\frac{\pi}{4}$, а третий $\frac{\pi}{3}$. Определить объем пирамиды.

3. Решить уравнение $\sin \pi\sqrt{t} + \sin \pi t = 0$.

4. Решить неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \log_3 x > 1$.

5. Найти угол между диагоналями параллелограмма $ABCD$, если известны координаты вершин $A(2; 4; -4)$, $B(1; 1; -3)$, $C(-2; 0; 5)$, $D(-1; 3; 4)$.

**В—40**

1. Решить уравнение $4\log_4^2(-x) + 2\log_4(x^2) = -1$.

2. В шар радиуса $R$ вписана правильная четырехугольная пирамида. Основание пирамиды делит радиус, перпендикулярный к этому основанию, в отношении $m:n$. Определить радиус шара, вписанного в пирамиду.

3. Решить уравнение

$$\sec^4 x + \cos^4 x = 1 + \cos 2x - 2\sin^2 2x.$$

4. Решить неравенство $x^{\log_{0,3}0,3} + 0,3^{\log_{0,3}x} \leqslant 0,18$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{4}{x}$ и $y = 5 - x$.

**В—41**

1. Решить уравнение

$$3\log_2^2 \sin x + \log_2(1 - \cos 2x) = 2.$$

2. Найти угол между образующей и высотой конуса, у которого площадь боковой поверхности есть среднее пропорциональное между площадью основания и площадью полной поверхности.

3. Решить уравнение $\operatorname{ctg}^4 2z = \cos^2 4z + 1$.

4. Решить неравенство $x^2 - 4|x| + 3 > 0$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$, если $x \in [-2; 1]$.

**В—42**

1. Решить уравнение $4\log_2^2 \cos x + \log_2(1 + \cos 2x) = 3$.

2. Около шара описан усеченный конус, у которого площадь одного основания в четыре раза больше площади другого основания. Найти угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

3. Решить неравенство $\frac{\sqrt{1 - 2x + x^2} + x}{x} > 0$.

4. Решить уравнение

$$18\cos^2 x + 5(3\cos x + \sec x) + 2\sec^2 x + 5 = 0.$$

5. Найти плоскость, параллельную плоскости $x - 2y = 3z$, проходящую через точку $A(2; 2; -2)$.

**В—43**

1. Решить уравнение

$$6\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x-2} = 5\sqrt[6]{(x-3)(x-2)}.$$

2. Боковая грань правильной усеченной треугольной пирамиды составляет с плоскостью основания угол, равный $\alpha$. Найти отношение площади полной поверхности пирамиды к площади поверхности вписанного в нее шара.

3. Решить неравенство $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} < 10$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{ctg} t) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} t)$.

5. Найти экстремальные значения функции $y = x^3 - \ln(1 + 2x)$.

**В—44**

1. Решить уравнение $\log_{\frac{1}{2}\sin 2x} \sin x = \frac{1}{2}$.

2. Две боковые грани усеченной пирамиды — конгруэнтные между собой прямоугольные трапеции с острым углом $\alpha$; двугранный угол между этими гранями равен $\beta$. Найти угол между третьей боковой гранью и плоскостью основания.

3. Решить неравенство $\sqrt{x^2 + 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x + 1} < 1$.

4. Решить уравнение $\sec^4 x - 2\sec^2 x - 12 \operatorname{tg} x = 16$.

5. Даны координаты вершин треугольника $A(1; 2; 5)$, $B(0; -2; 1)$, $C(5; 0; -1)$. Найти длину медианы, проведенной из вершины $B$ на сторону $AC$.

**В—45**

1. Решить уравнение $|x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12$.

2. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к площади полной поверхности пирамиды равно $k$. Найти двугранный угол при основании.

3. Решить неравенство $\frac{3^{2|x-1|} + 3}{4} < 3^{|x-1|}$.

4. Решить уравнение $\sin^8 2x + \cos^8 2x = \frac{41}{128}$.

5. Найти углы $\triangle ABC$ с вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$.

**В—46**

1. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + \ldots + (x^2 + 20x + 39) = 4500.$$

2. Угол между высотой и образующей конуса равен $\alpha$. Через вершину конуса проведена плоскость, составляющая

угол $\beta$ с высотой ($\beta < \alpha$). В каком отношении эта плоскость делит окружность основания?

3. Решить неравенство $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg}(\pi \cos t) = \operatorname{ctg}(\pi \sin t)$.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = \sin^6 x + \cos^6 x$.

**В—47**

1. Решить уравнение

$$(x^2+1) + (2x^2+3) + (3x^2+5) + \ldots + (10x^2+19) = 4500.$$

2. Основанием наклонной призмы служит равнобедренная трапеция, у которой боковая сторона конгруэнтна меньшему основанию и равна $a$, а острый угол равен $\alpha$. Одна из вершин верхнего основания призмы равноудалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем призмы, если боковое ребро составляет с плоскостью основания угол, равный $\beta$.

3. Решить неравенство $\log_{0,2} \log_5 \frac{x^2+x}{x+3} < 0$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + \cos 4x$.

5. В какой точке касательная к параболе $y = x^2 - 1$ параллельна прямой $6x - y - 10 = 0$?

**В—48**

1. Решить уравнение $x^2 \cdot 2^x + 8 = 2x^2 + 2^{x+2}$.

2. В прямоугольном треугольнике с острым углом $\alpha$ через наименьшую медиану проведена плоскость, составляющая с плоскостью треугольника угол $\beta$. Найти углы между этой плоскостью и катетами треугольника.

3. Решить неравенство $\log_5 \sqrt{3x+4} \cdot \log_x 5 < 1$.

4. Решить уравнение $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x - 3\operatorname{ctg}^2 x - 3\operatorname{ctg} x = 2$.

5. Найти расстояние между параллельными плоскостями $3x - 4y + 5z = 2$ и $3x - 4y + 5z + 13 = 0$.

**В—49**

1. Решить неравенство $|x-6| > |x^2 - 5x + 8|$.

2. Основанием призмы служит правильный треугольник со стороной, равной $a$. Боковое ребро равно $b$ и составляет с пересекающими его сторонами основания равные углы, каждый из которых равен $\alpha$. Найти объем призмы.

3. Решить уравнение

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x + \ldots + (-\operatorname{tg} x)^n + \ldots}{1 + \operatorname{tg} x + \ldots + (\operatorname{tg} x)^n + \ldots} = 1 + \sin 2x.$$

4. Решить уравнение $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$.

5. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$.

**В—50**

1. Решить уравнение $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

2. Образующая усеченного конуса, описанного около шара, равна $a$, угол между образующей и плоскостью основания равен $\alpha$. Найти объем конуса, основанием которого служит круг касания шаровой поверхности с боковой поверхностью усеченного конуса, а вершина совпадает с центром большего основания усеченного конуса. При каком значении $\alpha$ этот объем наибольший, если $a$ постоянно?

3. Решить неравенство $2\log_{\log_2 x} 3 < 1$.

4. Решить уравнение $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

**В-51**

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{a-16}{a+4\sqrt[4]{a}+16} : \frac{\sqrt[4]{a}+4}{a\sqrt[4]{a}-64}\right)^{0,5} - \sqrt{a}.$$

2. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, в которой параллельные стороны $a$ и $b$ $(a > b)$, а неравные отрезки диагоналей образуют угол $\varphi$. Найти объем пирамиды, зная, что высота пирамиды, опущенная из вершины, проходит через точку пересечения диагоналей основания, а величины двугранных углов, прилежащих к параллельным сторонам основания, относятся как 2 : 1

3. Решить уравнение $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}^3\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$.

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1, \\ xy^2 = 4. \end{cases}$$

5. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{3x+4}-2}$.

**В—52**

1. Упростить выражение $\dfrac{\sqrt{(3x+1)^2 - 12x}}{3\sqrt{x} - (\sqrt{x})^{-1}}$.

2. Равнобедренная трапеция с диагональю, перпендикулярной к боковой стороне, и основаниями, равными $a$ и $b$, вращается вокруг боковой стороны. Найти объем тела вращения.

3. Решить уравнение

$$\sin^3 x(1+\operatorname{ctg} x)+\cos^3 x(1+\operatorname{tg} x)=\cos 2x.$$

4. Решить неравенство $\sqrt{x+6}>\sqrt{x+1}+\sqrt{2x-5}$.

5. Найти $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}$.

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

## Глава 1

3. 1 при $x \neq 0$. 4. 1 при $x^2 \neq \sqrt[3]{4y^2}$. 5. $2x^{-1}$ при $x \neq 16$, $x > 0$. 6. 1 при $x \neq a^2$. 11. $16x^4\ a^{-2}$ при $a \neq 2x$, $a \neq 0$, $x \neq 0$. 12. $(a-1)^{-0,5}$ при $a > 1$. Разложить знаменатель как разность квадратов. 13. $\sqrt{a-1}$ при $a > 1$. 14. 1 при $\sqrt{a} - 2\sqrt[4]{ab} - 2\sqrt{b} \neq 0$. Числитель представить в виде $(\sqrt{a} - 2\sqrt{b})^2 - 4\sqrt{ab}$, а затем разложить как разность квадратов. 18. 1 при $a \neq b$. Выполнить преобразования $\sqrt{a^2-b^2} - a + b = \sqrt{(a-b)(a+b)} - (a-b) = \sqrt{a-b}\,(\sqrt{a+b} - \sqrt{a-b})$. 19. 3 при $x \neq 0$, $x \neq \pm 27$. 20. 0 при $x \neq y$. 21. 1 при $a^2 \neq b^2$, $b > 0$. 22. $x$ при $x > 0$. 23. $y - x$ при $x > 0$, $y > 0$. 24. $x^3$ при $x > 0$, $x^3 \neq y$. 25. $\frac{2x-5}{2x+5}$, если $|x| > 2{,}5$. Разложить на множители $2x^2 - 5 + 3x$ и $2x^2 - 5 - 3x$. 26. $\frac{3x}{16a^2}$ при $3x \neq -8a$. 27. $\frac{4}{3}b$ при $b > -3$, $b \neq 0$. 28. $\sqrt{x^2-2xy}$ при $x^2 > 2xy$. 29. $a+b$ при $a^2 \neq b^2$. 30. $b^2+8$. 34. $\sqrt{6x}$ при $x > 0$. 35. $\sqrt[3]{a}$ при $a \neq -1$. 36. 0. 37. $-2$. 38. 1. 39. $x^2y^3$ при $x > 0$, $y > 0$. 40. 1 при $x \neq 4$. 47. $\frac{1}{2}\sqrt{2x+1}$ при $x > \frac{3}{2}$; $\frac{2}{\sqrt{2x+1}}$ при $-\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$. 48. 3. 49. 1 при $x \neq y$. 50. $2x$ при $x > \frac{3}{2}$. 51. $\frac{1}{3}(a + \sqrt{a^2-9})$ при $a > 3$. 52. $\frac{2\sqrt{x-2}}{x-4}$ при $x > 4$; $\frac{-2\sqrt{2}}{x-4}$ при $2 < x < 4$. 55. $\sqrt{2}$ при $\frac{1}{2} \leqslant x < 1$; $-\sqrt{2}$ при $x > 1$. Представить числитель в виде $1 - \sqrt{2x-1} = \sqrt{(1-\sqrt{2x-1})^2}$. 56. $\sqrt{x}$ при $x > 2$; $-\sqrt{x}$ при $0 < x < 2$. 57. $\sqrt{4t-2}$ при $\frac{1}{2} < t < 1$; $\sqrt{2}$ при $t \geqslant 1$. 58. $6$ при $t < 0$, $6 - 4t$ при $0 \leqslant t < 3$, $-6$ при $t \geqslant 3$. 59. $a-1$ при $a > -1$; $1-a$ при $a < -1$. 60. 1 при $|x| > 1$; $-1$ при $|x| < 1$. 61. $-(x+1)$ при $x \leqslant -1$; $x+1$ при $-1 < x \leqslant 1$; $(x+1)(2x-1)$ при $x > 1$. 62. $\frac{x(2x+1)}{2x-1}$ при $x < 0$; $x$ при $0 < x < \frac{1}{2}$; $-x$ при $x > \frac{1}{2}$. 63. $(x-6)(x+2)$ при

$x<2$; $(x+2)^2$ при $x>2$. 64. $\frac{4-x^2}{x^2+4x-4}$ при $x\leqslant 1$; $\frac{x+2}{2-x}$ при $1<x<2$; $\frac{x+2}{x-2}$ при $x>2$. 69. $\sqrt{x}$ при $x>\frac{2}{3}$; $-\sqrt{x}$ при $0<x<\frac{2}{3}$. 70. $\left|\frac{x}{a}-\right.$ $\left.-\frac{a}{x}-1\right|$ при $a\neq 0$, $x\neq 0$. Произвести замену $\frac{x}{a}-\frac{a}{x}=y$. 71. $\sqrt{2x}$ при $0<x<2y^2$; $2y^{\frac{3}{2}}$ при $0<2y^2<x$. 72. $2\sqrt{b-1}$ при $b>1$. 73. $y\sqrt{x}$ при $x>0$. 74. 2 при $x\neq 0$. 75. $x^{m-1}$ при $x\neq 0$; $x+y-$ $-\sqrt{xy}\neq 2$. 76. 1 при $x\geqslant 0$. 77. $\sqrt{a}$ при $a\geqslant 0$. 78. 5. 79. 1. 80. $-2$. 81. $x$.

## Глава II

5. $\{0{,}5;\ -1;\ 2\}$. 6. $\left\{-\frac{2}{3};\ -1\pm\sqrt{5}\right\}$. 7. $\{-1{,}5\}$. 8. $\{\pm 2;\ -1;$ $3\}$. 9. $\{-1;\ -1{,}5\}$. 10. $\left\{-\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 2\pm\sqrt{3}\right\}$. 11. $\left\{-\frac{1}{3};\ \frac{1}{3}\right\}$. 12. $\{2\}$. 17. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2};\ -1\pm\sqrt{3}\right\}$. 18. $\{3\pm\sqrt{21};\ 6;\ -2\}$. Произвести замену $\frac{x}{3}-\frac{4}{x}=t$. 19. $\{0{,}5\,(3\pm\sqrt{21})\}$. Сделать замену $x^2+3x=t$. 20. $\{0;\ 2;\ 1\pm\sqrt{3}\}$. 21. $\left\{\frac{-7\pm\sqrt{73}}{4}\right\}$. Преобразовать к виду $(2x^2+$ $+7x-4)(2x^2+7x+6)+9=0$, затем обозначить $2x^2+7x=y$. 22. $\{-3;\ 1\}$. Сделать замену $x^2+2x=t$. 23. $\{-4;\ 1\}$. Обозначить $x^2+3x=y$. 24. $\{5\}$. Сделать замену $\sqrt{2x-1}=t$. 29. $\left\{\frac{1}{2}(-5\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{85});\ \frac{1}{2}(-5\pm\sqrt{5})\right\}$. 30. $\{0;\ 1\}$. 31. $\left\{\frac{5\pm\sqrt{29}}{2};\ 1\pm\sqrt{2}\right\}$. 32. $\{1;\ 2\}$. 33. $\{1{,}5;\ -2{,}5\}$. Произвести замену $x+0{,}5=t$. 34. $\left\{0{,}5;\right.$ $\left.-\frac{1}{3};\ \frac{1}{4}\right\}$. Произвести замену $x=\frac{1}{t}$. 35. $\{1;\ 1\pm\sqrt{13}\}$. 36. $\left\{2\pm\right.$ $\left.\pm\sqrt{11};\ \frac{1}{2}(9\pm\sqrt{109})\right\}$. 37. $\left\{\frac{1}{2}(9\pm\sqrt{261});\ \frac{1}{2}(1\pm\sqrt{21})\right\}$. Прибавить к обеим частям уравнения $-2x$; $\frac{5x}{x+5}$, затем обозначить $\frac{x^2}{x+5}=t$. 38. $\{1\}$. 39. $\left\{\frac{29}{18};\ -\frac{46}{33}\right\}$. 40. $\left\{14;\ \frac{14}{27}\right\}$. 41. $\left\{\frac{5}{7}\right\}$. 42. $\left\{\frac{1}{2}\times\right.$ $\left.\times(-5\pm\sqrt{21})\right\}$. Разделить числитель и знаменатель каждой дроби

на $x$, произвести замену $x+\frac{1}{x}=t$. 43. $\left\{2;\ -\frac{1}{6};\ \frac{1}{54}(19\pm\sqrt{1333})\right\}$. 44. $\{2;\ -1\pm\sqrt{43}\}$. К обеим частям уравнения прибавить $2x\cdot\frac{x}{x-1}$, затем обозначить $\frac{x^2}{x-1}=t$. 47. $\left\{\frac{3+\sqrt{8}}{\sqrt{2}-1};\ \frac{7+\sqrt{8}}{\sqrt{2}+1}\right\}$. Учитывая, что $x^2+x-6=(x+3)(x-2)$, разделить обе части уравнения на $(x-2)^2$, затем обозначить $\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2=t$. 46. $\left\{2;\ 4;\ -1;\ -\frac{1}{2}\right\}$. Разделить обе части уравнения на $(x-1)^2$, затем произвести замену $\frac{x^2+x+1}{x-1}=t$. 49. $\left\{\frac{125}{63};\ \frac{190}{63}\right\}$. 50. $\left\{3;\ \frac{81-9\sqrt{85}}{8}\right\}$. 51. $\left\{-3;\ 6;\ \frac{-3\pm\sqrt{73}}{2}\right\}$. 52. $\left\{-\frac{1}{2};\ -\frac{5}{4}\right\}$. Умножить обе части уравнения на 16 и произвести подстановку $8x+7=t$. 53. $\{0;\ -5\}$. 54. $\{3;\ 3\pm\pm2\sqrt{5}\}$. 55. $\{1;\ -3\}$. Произвести замену $x+1=t$. 56. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Умножить обе части уравнения на $x+1$. 57. $\{0;\ 4\}$. 62. $\{\pm7\}$. 63. $\{2;\ -24\}$. 64. $\{5,\ -2{,}4\}$. 65. $\{1;\ 2\sqrt[3]{4};\ -3\sqrt[3]{9}\}$. 66. $\{12\}$. 67. $\{4;\ -3\}$. 68. $\{1\}$. 69. $\left\{1;\ 1\pm\sqrt{\frac{27}{28}}\right\}$. 70. $\left\{1;\ -\frac{1}{4}\right\}$. Обозначить $4x^2-3x=t$. 71. $\{0;\ 1\}$. 74. $\{3;\ -24;\ -88\}$. Произвести подстановку $24+x=t^3$. 75. $\{2;\ 6\}$. Левую часть уравнения представить в виде $(\sqrt[4]{6-x}+\sqrt[4]{x-2})^2$, затем обозначить $\sqrt[4]{6-x}=t$, $\sqrt[4]{x-2}=z$. Получим систему

$$\begin{cases}t+z=\sqrt{2},\\ t^4+z^4=4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t^2+z^2+2zt=2,\\ (t^2+z^2)^2=4+2z^2t^2\end{cases}\Rightarrow((zt)^2=4zt)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}zt=0,\\ zt=4.\end{array}\right.$$

76. $\{2\}$. Произвести замену $x=2t^2$. 77. $\{1\}$. 78. $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. 79. $\{3,\ 3\sqrt{5}-6\}$. Возвести в квадрат и обозначить $\frac{3}{x}=t$. 80. $\pm2\,(1+2\times\times\sqrt[3]{4})^{-0{,}5}$. Решение аналогично примеру 73. 81. $\left\{\frac{1\pm\sqrt{22}}{3}\right\}$. Произвести замену $3x^2-2x+9=t^2$. 82. $\left\{\frac{97}{36}\right\}$. Произвести замену $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}=t$. 83. $\{1\}$. Решение аналогично примеру 73. 84. $\left\{3;\ 1;\ -\sqrt{5\left(1+\frac{\sqrt{55}}{8}\right)}\right\}$. Возвести в квадрат обе части уравнения, затем произвести замену $x\sqrt{10-x^2}=\frac{1}{t}$. 85. $\left\{-\frac{2}{1\pm\sqrt[6]{2}}\right\}$. Решение аналогично примеру 73. 86. $\{3\}$. Произвести замену $\sqrt{2x+3}+$

$+\sqrt{x-3}=t$. 87. $\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}$. Представить уравнение в виде $(x-$ $-\sqrt{2+3x})^2=0$. 88. $\left\{\frac{\sqrt{2\sqrt{3}-3}}{2}\right\}$. Решение. Возводим обе части уравнения в квадрат и преобразуем

$$\left(2+2\sqrt{1-4x^2}=\frac{16x^2}{1-4x^2}\right)\Rightarrow\left(\sqrt{1-4x^2}=t,\ 2+2t=\frac{4(1-t^2)}{t^2}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(2=\frac{4(1-t)}{t^2}\right)\Rightarrow(t^2+2t-2=0)\Rightarrow(t=\sqrt{3}-1)\Rightarrow(1-4x^2=$$

$$=4-2\sqrt{3})\leftrightarrow(4x^2=2\sqrt{3}-3).$$

89 $\left\{1;\ -\sqrt{1+\frac{\sqrt{3}}{8}}\right\}$. Решение аналогично примеру 84. 90. {13; 1; —2}. Разложить на множители подкоренные выражения. 91. $\left\{2;\ -\frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$. 92. {±1}. 93. $\left\{5;\ \frac{1}{2}\right\}$. 94. {1,5}. 95. {5; —1}. 96. $\frac{16}{25}$. 97. {21}. 98. {3; —1; $7+\sqrt{52}$}. Решение Имеем

$$\begin{bmatrix}2\sqrt{2x+3}=x+3,\\ 2\sqrt{2x+3}=x-3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x^2-2x-3=0,\\ x^2-14x-3=0.\end{bmatrix}$$

99. $\left\{\frac{1\pm\sqrt{7}}{3}\right\}$. Произвести замену $3x-\frac{2}{x}=y$. 102. $3{,}5<x<7$. Обозначить $\sqrt{14x-49}=y$. 103. {15}. 104. {2}. 105. {5}. 106. {±3,5}. Решение аналогично примеру 101. 107. $-1{,}5<x<1{,}5$. 108. $\left\{-1;\ \frac{2}{3}\right\}$. 109. $-\frac{2}{3}<x<0$. 110. {—2,5}. Решение. Имеем $(|x|=0)\Rightarrow(x=0)$, $(|x|=1)\Rightarrow(x=\pm1)$. Исследуем в различных интервалах а) $x<-1$, тогда уравнение приводится к виду

$$(|-x-1|=4+x)\Rightarrow(-x-1=4+x)\Rightarrow(x=-2{,}5);$$

б) при $-1<x<0$ получаем $x+1=4+x$, т. е. $x\in\varnothing$; в) при $0<x<1$ имеем

$$(|x-1|=4+x)\Rightarrow(1-x=4+x)\leftrightarrow(x=-1{,}5),$$

т. е. полученное значение $x=-1{,}5$ не удовлетворяет условию $0<$ $<x<1$; г) при $x>1$ имеем $x-1=4+x$, т. е. $x\in\varnothing$. 111. {±3; ±1}. 112. $\left\{-2;\ -\frac{4}{3}\right\}$. 113. {—3; 1}. 114. $1{,}5<x<3$. 115. {±2,5}. 116. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{33}}{4}\right\}$. 117. {4; 1}.

## Глава III

6. $1-\frac{1}{n}$. 7. $\frac{n-1}{3(2n+1)}$. 8. $\frac{1}{8}$. 9. 87 или 69. 10. —3, —6, —12, —24. 11. $\left\{\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right\}$. Использовать сумму $x+x^2+x^3+\cdots=$

$= \frac{x}{1-x}$. 12. 2, 4, 8, 12 или $\frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}$. 13. $\left\{\frac{1}{2}; -\frac{7}{9}\right\}$. 14. 2, 6, 18, ... или 18, 6, 2, .... 15. 4. 16. $a_1 = 1$, $q = -\frac{2}{3}$ или $a_1 = 0{,}2$, $q = \frac{2}{3}$. 17. 7; —28, 112; —448. 18. 70 336. 19. 1064. Использовать свойство $a_1 + a_{19} = a_4 + a_{16} = a_8 + a_{12}$. 20. $25\frac{25}{27}$. Решение. $u_1 = a_1$, $u_1 q = a_4$, $u_1 q^2 = a_8$. Тогда $u_1 q - u_1 = a_4 - a_1 = 3d$, $u_1 q^2 - u_1 = a_8 - a_1 = 7d$. Далее имеем

$$\left(\frac{u_1(q^2-1)}{u_1(q-1)} = \frac{7d}{3d}\right) \Rightarrow \left(q = \frac{4}{3}\right).$$

Учитывая, что $u_1 + u_1 q + u_1 q^2 = 16\frac{4}{9}$, находим $u_1 = 4$. 21. Используя свойство геометрической прогрессии, $a_{n+1} = a_n + d$, получим

$$\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right).$$

22. 2, —6, 18, —54 или —54, 18, —6, 2.

## Глава IV

5. 3. 6. —3. 7. 1 при $\log_a b > -1$; —1 при $\log_a b < -1$, $b \neq 1$. 8. $\left(x\left(\sqrt{x}-1\right)\right)$ при $x > 0$, $x \neq 1$. 9. 22. 10. 10. 18. $\left\{\frac{1}{9}; 3\right\}$. Привести логарифмы к основанию 3, затем произвести замену $\log_3 x = t$. 19. {2; 0,5}. Привести логарифмы к основанию 4. 20. {25}. 21. $\left\{1; -\frac{1}{15}\right\}$. Привести к основанию 2. 22. {4; 8}. 23. {4}. Привести логарифмы к основанию 4. 24. $\left\{\frac{5}{3}\right\}$. Привести логарифмы к основанию 2. 25. {9}. 26. 4. Привести логарифмы к основанию 2. 27. $\{2; \log_5 0{,}1\}$. Решение аналогично примеру 17. 28. {5; —1}. 29. $\left\{2^{-\frac{46}{13}}; 2\right\}$. Привести к основанию 2. 30. $\{3^{-3}; 3^{-0,8}\}$. Привести к основанию 3. 31. {—2; 1}. 32. $\varnothing$. 33. 5. Привести к основанию $2x - 7$. 34. $\left\{-1; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. 35. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 36. {1; 4}. Привести к основанию 5. 37. $\left\{\frac{15}{7}\right\}$. 38. $\{2^{\pm\sqrt{3}}\}$. Привести к основанию 2. 39. $\{1 \pm \sqrt{7}\}$. 40. {1}. Выполнить преобразования $(3^{2x+1} \cdot 2^{2x+1} = 2^{3x} \cdot 3^{x+2}) \Rightarrow (3^{x-1} = 2^{x-1}) \Rightarrow (x - 1 = 0) \leftrightarrow (x = 1)$. 49. {0,04}. Произвести подстановку $\log_x 5 = t$. 50. $\left\{1; \frac{1}{16}\right\}$. Привести логарифмы к основанию 4, затем обозначить $5^{1+\log_4 x} = t$. 51. {2}. 52. $\{9; 3^{-3}\}$. 55. $\left\{\log_3(2+\sqrt{5}), \log_3\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}$. Произвести замену

$3^x - 3^{-x} = z$. 57. $\{1 \pm \sqrt{1 + \log_{2+\sqrt{3}} 10}\}$. Использовать равенство $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$. 58. $\{\log_{1+\sqrt{3}} 2\}$. Решение. $(1+\sqrt{3})^x + \frac{1}{2}(4+2\sqrt{3})^x = 4$. Так как $4+2\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})^2$, то производим подстановку $(1+\sqrt{3})^x = y$. 64. $\{\log_{2+\sqrt{3}} 4\}$. Так как $2 - \sqrt{3} = \frac{1}{2+\sqrt{3}}$, то имеем $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} - (2-\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = 1{,}5$. Далее производим замену $(2+\sqrt{3})^{\frac{x}{2}} = y$. 65. $\{5; 5^{-4}\}$. 66. $\left\{2; 2^{-\frac{3}{2}}\right\}$. 67. $\{4; 2; 2^{-1}\}$. 68. $\left\{\frac{1}{9}\right\}$. 69. $\{1\}$. 70. $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{15}\right\}$. Решение. Имеем $3^{\log_5 3} \cdot 5^{\log_5 3} \cdot x^{2\log_5 3 + \log_5 x + 1} = 1$. Обозначим $\log_5 3 = a$, $\log_5 x = y$, тогда получим $3 = 5^a$, $x = 5^y$. Далее

$$(5^{a^2} \cdot 5^a \cdot 5^{y(2a+y+1)} = 1) \Rightarrow (y^2 + (2a+1)y + a(a+1) = 0) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -a, \\ y = -(a+1) \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5^{-a}, \\ x = 5^{-(a+1)}. \end{array}\right.$$

75. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. 76. $\{100\}$. Обозначить $\lg x = y$. 77. $\{100\}$. 78. $\{0{,}01; 100\}$. 79. $\{64\}$. 80. $\{3; 3^9\}$. 83. $\{0; 1\}$. 84. $\{-1\}$. 85. $\{2\}$. 86. $\{-\log_{1,5} 3\}$. 87. $\{-2\}$. 88. $\left\{\log_{\frac{4}{9}} \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$. 89. $\{\pm 0{,}5\}$. Разделить обе части на $\sqrt[x]{25}$, затем сделать замену $\sqrt[x]{2} = y$. 90. $\{100\}$. Разделить обе части уравнения на $3^{\lg x}$, затем выполнить подстановку $\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^{\lg x} = t$. 95. $\{\log_{0,4} 2\}$. 96. $\{3; 3^{-2}\}$. Сделать замену $\log_3 x = y$. 97. $\{10^{0,4}; 1\}$. 98. $\left\{5^{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}}\right\}$. 99. $\{256; \sqrt{2}\}$. Привести все логарифмы к основанию 4, затем произвести подстановку $\log_4 x = t$. 100. $\{4; 1\}$. Сделать замену $2^{1-x+\sqrt{4-5x+2x^2}} = t$. 101. $\{2; \log_3 2 - 4\}$. Решение. $(2^{x+3} + 2^x = 3^{x^2+2x-5} + 3^{x^2+2x-6}) \Rightarrow (2^{x-2} = 3^{x^2+2x-8}) \Rightarrow$ $\Rightarrow (2^{x-2} = (3^{x+4})^{x-2}) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0, \\ 2 = 3^{x+4} \end{array}\right.$ 102. $\{5; 0{,}04\}$. Сделать замену $\log_5 x = t$. 103. $\left\{3; \frac{1}{9}\right\}$. 104. $\left\{\log_2 \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$. 105. $\left\{\log_3 28; \log_3 \frac{82}{81}\right\}$. Сделать замену $3^x - 1 = t$. 106. $\{3^{-1,5}\}$. 107. $\{10; 0{,}1\}$. Сделать замену $\lg x = t$. 108. $\{\log_3^2 2\}$. 109. $\{\log_{\sqrt{7}+1} 2\}$. Использовать тождество $(\sqrt{7}+1)^2 = 2(\sqrt{7}+4)$. 110. $\{5\}$.

111. $\left\{\frac{\sqrt{9001}-31}{20}\right\}$. 112. $\left\{\frac{1}{2}\left(\log_3\frac{15}{4}\right)\right\}$. 113. $\left\{\left(\log_9\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{-1};\ \left(\log_{\frac{4}{9}}\frac{3-\sqrt{5}}{5}\right)^{-1}\right\}$. Разделить обе части уравнения на $2^{\frac{x}{2}}$ и сделать замену $\left(\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}\right)^x = t$, тогда $\left(\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}\right)^x = \frac{1}{t}$. 114. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. 115. $\{8\}$. 116. $\{\log_{\frac{3}{4}} 30\}$. 117. $\{20;\ 0{,}01\}$. Сделать замену $\lg x = t$. 118. $\{1;\ \sqrt{27}\}$. Прологарифмировать обе части уравнения.

## Глава V

4. $\{(2;\ -2)\}$. 5. $\left\{\left(1;\ \frac{1}{2}\right),\ (2;\ 1)\right\}$. 6. $\left\{(3;\ 2),\ \left(\frac{17}{27};\ -\frac{14}{9}\right)\right\}$ 7. $\left\{\left(\frac{-125\pm\sqrt{29090}}{232};\ \frac{-125\pm\sqrt{29090}}{18}\right),\ (5;\ 4),\ \left(-\frac{29}{4};\ -\frac{29}{5}\right)\right\}$. 8. $\{(2;\ -2),\ (2;\ 2),\ (-2;\ 2),\ (-2;\ -2)\}$. 9. $\{(5;\ 3),\ (-5;\ -3)\}$. 10. $\{(1;\ 2),\ (2;\ 1)\}$. 11. $\left\{(1;\ 7),\ \left(\frac{49}{64};\ \frac{41}{8}\right),\ (7;\ -8)\right\}$. 12. $\left\{(2;\ 1),\ (1;\ 2),\ (-1;\ -2),\ (-2;\ -1),\ \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{5};\ \pm\frac{\sqrt{5}}{10}\right),\ \left(\pm\frac{\sqrt{5}}{10};\ \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$. 13. $\left\{(10;\ 1),\ \left(-\frac{21}{2};\ \frac{53}{12}\right)\right\}$. 14. $\left\{\left(\frac{520}{9};\ \frac{65}{9}\right),\ \left(\frac{65}{9};\ \frac{520}{9}\right)\right\}$. 15. $\{(4;\ 9),\ (9;\ 4)\}$. 18. $\{(0;\ 0),\ (3;\ 2),\ (-2;\ -3)\}$. 19. $\{(4;\ 9),\ (9;\ 4)\}$. 20. $\{(\pm 3;\ \pm 4),\ (\pm 4;\ \pm 3)\}$. 21. $\{(1;\ 27),\ (27;\ 1)\}$. 22. $\{(\pm 3;\ \pm 1),\ (\pm 1;\ \pm 3)\}$. 23. $\{(2;\ 3),\ (-2;\ -3),\ (2;\ -3),\ (-2;\ 3)\}$. 26. $\{(-1;\ -2),\ (-2;\ -1)\}$. Умножить соответствующие части обоих уравнений, затем сделать замену $x+y=t$, $xy=z$. 27. $\{(\pm 2;\ \pm 2),\ (\pm 2;\ \mp 2)\}$. Вычесть соответствующие части обоих уравнений. 28. $\{(-2;\ 3),\ (3;\ -2)\}$. Сделать замену $x+y=t$, $xy=z$. 29. $\left\{(0;\ 0),\ (\pm\sqrt{8};\ \mp\sqrt{8}),\ (\pm 2;\ \pm 2),\ \left(\pm\sqrt{3\pm\sqrt{5}};\ \pm\sqrt{3\mp\sqrt{5}}\right)\right\}$. 32. $\{(5;\ 3),\ (5;\ 4)\}$. Решение. Обозначим $\sqrt{x^2-y^2}=t$, $x+y=z$, получим две системы

$$\begin{cases} z+t=12, \\ yt=12 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x^2-y^2=t^2, \\ x+y=z. \end{cases}$$

Решаем вторую систему

$$\begin{cases} x^2-y^2=t^2, \\ x+y=z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=z, \\ x-y=\frac{t^2}{z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{z}+z\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(z-\frac{t^2}{z}\right). \end{cases}$$

Подставляя значение $y$ в первую систему, получим

$$\begin{cases} t+z=12, \\ \frac{1}{2}\left(z-\frac{t^2}{z}\right)t=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=12-z, \\ (z-t)\,t=2z \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} t=4, \\ z=8, \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{cases} x+y=8, \\ x-y=2, \end{cases}\right.\right.$$

$$\left.\left.\begin{cases} t=8, \\ z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=9, \\ x-y=1, \end{cases}\right.\right.$$

**38.** $\{(2;\ 1)\}$. **34.** $\{(\pm 8a;\ \pm 27a)\}$, где $a=\frac{\sqrt{26}}{13}$. **38.** $\{(1;\ 4)\}$. **39.** $\{(1{,}5;\ 0{,}5),\ (-2;\ 4)\}$. **40.** $\left\{\left(\frac{3}{14};\ \frac{1}{14}\right)\right\}$. **41.** $\{(1;\ 1),\ (2;\ 4)\}$. **42.** $\{(-1;\ 1),\ (1;\ 1),\ (3^{-\frac{1}{3}};\ 9^{-\frac{1}{3}})\}$. **43.** $\left\{\left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)\right\}$.

**47.** $\{(a^{\frac{q^2}{p(q-p)}};\ a^{\frac{q}{q-p}})\}$. Решение. Из первого уравнения $x=y^{\frac{q}{p}}$. Подставляя это соотношение в обе части второго уравнения, имеем

$$\left(\log_a y^{\frac{q}{p}-1}=\frac{q}{p}\right) \Rightarrow \left(y^{\frac{q}{p}-1}=a^{\frac{q}{p}}\right) \Rightarrow \left(y=a^{\frac{q}{q-p}}\right),$$

**48.** $\left\{\left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{3}\right)\right\}$. Решение. Обозначим $\lg x=t$, $\lg y=z$, тогда имеем

$$\begin{cases} 3^t=4^z, \\ (4\cdot 10^t)^{\lg 4}=(3\cdot 10^z)^{\lg 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t\lg 3=z\lg 4, \\ (4\cdot 10^t)^{\lg 4}=(3\cdot 10^z)^{\frac{z}{t}\lg 4} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4=3^{\frac{t}{z}} \\ 3^{\frac{t}{z}}\cdot 10^t=3^{\frac{z}{t}}\cdot 10^{\frac{z^2}{t}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3^{\frac{t^2-z^2}{zt}}=10^{\frac{z^2-t^2}{t}}, \\ 4=3^{\frac{t}{z}}. \end{cases}$$

Так как $t^2-z^2\neq 0$, то получаем систему $\begin{cases} 3^{\frac{t}{z}}=10^{-1}, \\ 4=3^{\frac{t}{z}}. \end{cases}$ Отсюда

$\left(\frac{1}{z}\lg 3=-1\right) \Rightarrow (z=-\lg 3)$; $(\lg y=-\lg 3) \Leftrightarrow \left(y=\frac{1}{3}\right)$. Далее имеем $(t\lg 3=z\lg 4) \Rightarrow (t=-\lg 4) \Rightarrow (\lg x=-\lg 4) \Leftrightarrow \left(x=\frac{1}{4}\right)$.

**49.** $\left\{(2;\ 6),\ \left(\frac{21-\sqrt{41}}{2};\ \frac{\sqrt{41}-1}{2}\right)\right\}$. Во втором уравнении системы все логарифмы привести к основанию $y$, затем произвести замену $\log_y x=t$. **50.** $\left\{(\sqrt{2};\ 2),\ \left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{4};\ -3\right)\right\}$. Решение.

$$\begin{cases} x=2^{\frac{1}{y^2}}, \\ (2x)^{y^2}=2^6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2\cdot 2^{\frac{1}{y^2}})^{y^2}=2^6, \\ x=2^{\frac{1}{y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2+y=6, \\ x=2^{\frac{1}{y^2}}. \end{cases}$$

Далее определяем значение $y$, затем находим значение $x$. 51. $\{(\sqrt[3]{9};\ 9),\ (9;\ \sqrt[3]{9})\}$. 52. $\{(50{,}05;\ 49{,}95),\ (5{,}005;\ -4{,}995)\}$. 53. $\{(\sqrt[5]{2};\ \sqrt[5]{16})\}$. 54. $\{(-1{,}4;\ -6{,}4),\ (3{,}5;\ 3{,}4)\}$. 55. $\left\{\left(\frac{5}{4};\ \frac{3}{2}\right)\right\}$. Из второго уравнения системы имеем: $(4x^2 - y^2 = 4) \Leftrightarrow ((2x - y)(2x + y) = 4) \Rightarrow$ $\Rightarrow \left(2x + y = \frac{4}{2x - y}\right)$. Затем подставим в левую часть первого уравнения системы. 61. $\{(\pm 1;\ \mp 1;\ -2),\ (\pm 1;\ -2;\ \mp 1),\ (-2;\ \pm 1;\ \mp 1)\}$. 62. $\{(1;\ 0;\ 1),\ (-7;\ -4;\ 5)\}$. 63. $\{(\pm 5;\ \mp 2;\ \mp 3),\ (\pm 2;\ \mp 5;\ \pm 3)\}$. 64. $\left\{(0;\ 0;\ 0),\ (1;\ 2;\ 1),\ (2;\ 1;\ 1),\ \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}};\ 1 \mp \sqrt{\frac{2}{3}};\ \frac{2}{3}\right)\right\}$. 65. $\{(9;\ 3;\ 1),\ (1;\ 3;\ 9)\}$. 66. $\left\{\left(\frac{7 \pm \sqrt{113}}{2};\ \frac{7 \mp \sqrt{113}}{2};\ 9\right),\right.$ $\left.\left(\frac{-7 \pm \sqrt{113}}{2};\ \frac{-7 \mp \sqrt{113}}{2};\ -9\right),\ (\pm 4;\ \pm 3;\ \pm 5),\ (\pm 3;\ \pm 4;\ \pm 5)\right\}$. 67. $\{(0;\ \pm 1;\ \pm 1),\ (\pm 1;\ 0;\ \pm 1)\}$; 68. $\{(5\alpha;\ 3\alpha;\ \alpha)\}$, где $\alpha = \pm (30)^{-\frac{1}{4}}$. 69. $\left\{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}};\ \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. 70. $\{(0;\ 0{,}0)\}$.

**Глава VI**

4. $]-\infty;\ 0[ \cup ]2;\ +\infty[$. 5. $\left]-\infty;\ -\frac{17}{4}\right[ \cup \left]-\frac{5}{2};\ 1\right[$. 6. $]-\infty;\ -2[ \cup ]0;\ 6[$. 7. $\left]1;\ \frac{8}{3}\right[$. 8. $]-\infty;\ -4[ \cup ]2;\ 3[$. 9. $]-\infty;\ -1[ \cup ]1;\ 2[ \cup ]3;\ +\infty[$. 14. $]-4;\ +\infty[$. 15. $\left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$. 16. $\left]-\infty;\ -2\right[ \cup \left]5;\ 5\frac{9}{13}\right[$. 17. $\left]-\frac{\sqrt{2}}{4};\ 0\right[ \cup \left]0;\ \frac{1}{3}\right[$. 18. $]-\infty;\ -2[ \cup ]0;\ +\infty[$. 22. $]-3;\ 6[$. Решение. Имеем $\begin{cases} 3x^2 + ax - 6 > -9(x^2 - x + 1), \\ 3x^2 + ax - 6 < 6(x^2 - x + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^2 + x(a - 9) + 3 > 0, \\ 3x^2 - x(a + 6) + 12 > 0. \end{cases}$ Система неравенств имеет решение при всех значениях $x$, если $\begin{cases} D_1 < 0, \\ D_2 < 0, \end{cases}$ где $D_1$ и $D_2$ — дискриминанты соответствующих трехчленов. Получаем систему $\begin{cases} (a - 9)^2 - 144 < 0, \\ (a + 6)^2 - 144 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -12 < a - 9 < 12, \\ -12 < a + 6 < 12. \end{cases}$ 23. $]-\infty;\ 0[ \cup ]2;\ 3[$. 24. $]-1,\ 3]$. 25. $\left]-\frac{22}{7};\ -\frac{14}{11}\right[$. 26. $a \in \varnothing$. 27. $\left[-3;\ \frac{3 - \sqrt{17}}{2}\right]$. 45. $\left]-\infty;\ \frac{-3 - \sqrt{21}}{3}\right[ \cup \left]\frac{\sqrt{21} - 3}{3};\ +\infty\right[$. 46. $]-1;\ 1[ \cup ]3;\ 5[$. 47. $]-\sqrt{2};\ 1[$. 48. $]3;\ 4[ \cup ]6;\ +\infty[$. 49. $]-2;\ -1[ \cup ]-1;\ 0[ \cup ]0;\ 1[ \cup ]2;\ +\infty[$. 52. $]-\infty;\ -3[ \cup ]1;\ \infty[$. 53. $]-\infty;\ \log_{0,4}2[$. 54. $]-\infty;\ 2 + \log_{0,5}6[$. 55. $]0;\ 1[$. 56. $]1;\ \infty[$. Неравенство равносильно системе $0 < \frac{x - 1}{x + 5} < 1$. 57. $]0;\ 1[ \cup ]1;\ +\infty[$.

58. ]—5; $-2-\sqrt{8,5}$[ $\cup$ ]$-2+\sqrt{8,5}$; 1[. 59. ]4; 10[. Решение. Имеем $(\log_{0,5}\log_3\log_{x-1}9>0) \Leftrightarrow (0<\log_3\log_{x-1}9<1) \Leftrightarrow (1<\log_{x-1}9<2) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}<\log_3(x-1)<1\right) \Leftrightarrow (3<x-1<9) \Leftrightarrow (4<x<10)$. 66. ]—∞; $-1-\sqrt{5}$[ $\cup$ ]$\sqrt{5}-1$; 2[. Рассмотреть равносильное неравенство $x^3>2|x-2|$. 67. $\left]-\frac{1}{2};0\right[\cup\left]\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right[$. 68. $\left]-\frac{1}{2}(5+3\sqrt{5});\frac{1}{2}(3\sqrt{5}-5)\right[$. 69. $\left]1;\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right[$. 70. ]—∞; —1[ $\cup$ $\left]\frac{3}{4};1\right[$. 71. $\left]-\frac{1}{2};1\right[$. Решение. Имеем $\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2<\frac{5}{4}-2\frac{x^2}{x+1}$. Произведем замену $\frac{x^2}{x+1}=t$. Получим $\left(t^2<\frac{5}{4}-2t\right) \Leftrightarrow \left(-\frac{5}{2}<t<\frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(-\frac{5}{2}<\frac{x^2}{x+1}<\frac{1}{2}\right)$. Далее решаем систему неравенств $\begin{cases} x+1>0, \\ 2x^2<x+1, \\ 2x^2>-5(x+1). \end{cases}$ 72. ]—∞; 0[ $\cup$ $\left]\frac{11}{4};+\infty\right[$. Неравенство равносильно системе $-3<\frac{x^2-2x-6}{x^2-3x+2}<3$. 73. $\left]1;\frac{161}{81}\right[$. 74. ]0; $2-\sqrt{2}$[ $\cup$ ]1; 2[ $\cup$ ]$2+\sqrt{2}$; $+\infty$[. 75. $\left]1;\log_3\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

## Глава VII

13. Применить формулы приведения: $\operatorname{ctg}\left(2\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=-\operatorname{tg}2\alpha$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{tg}\alpha$. 15. Применить формулы (47) и (48). 41. Сначала доказать, что $\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ=\frac{1}{8}$, затем применить формулу (39). 76. $\frac{-4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-4\alpha\right)}{\sin 8\alpha}$. 77. $\frac{3}{2}$. 78. 0. 79. $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$. 80. $\cos^2 2\alpha$. 81. 1. 82. $4\sin 4\alpha\operatorname{ctg}^2 4\alpha$. 87. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$; $\sqrt{3}-2$. 88. 1,5. Применить формулы (33) и (34). 89. 1. Использовать формулы приведения: $\operatorname{tg}89^\circ=\operatorname{ctg}1^\circ$, $\operatorname{tg}88^\circ=\operatorname{ctg}2^\circ$ и т. д. 90. $\operatorname{tg}\alpha=-3\pm\sqrt{8}$; $\cos\alpha=\frac{-1}{\sqrt{18\pm6\sqrt{8}}}$; $\operatorname{ctg}\alpha=-3\mp\sqrt{8}$; $\sec\alpha=-\sqrt{18\pm6\sqrt{8}}$; $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{18\mp6\sqrt{8}}}$;

$\operatorname{cosec}\alpha = \sqrt{18 \mp 6\sqrt{8}}$. 93. $\cos\alpha = 0{,}4$; $\sin\alpha = -\sqrt{0{,}84}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{21}{4}}$; $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{\frac{4}{21}}$; $\operatorname{cosec}\alpha = -\frac{5}{\sqrt{21}}$. 94. 1. 95. $\operatorname{ctg}\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$. 96. $-\sin 4\alpha$. 97. 1. 98. $4\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$. 103. Решение. $\left(\sin 4\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\beta\right) \leftrightarrow (\sin((2\alpha - \beta) + (2\alpha + \beta)) = \frac{3}{2}\sin((2\alpha+\beta) - (2\alpha - \beta))) \leftrightarrow (\sin(2\alpha - \beta)\cos(2\alpha+\beta) + \cos(2\alpha - \beta)\sin(2\alpha + \beta) = \frac{3}{2}(\sin(2\alpha + \beta)\cos(2\alpha - \beta) - \cos(2\alpha + \beta) \times \sin(2\alpha - \beta)) \leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\sin(2\alpha - \beta)\cos(2\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\sin(2\alpha + \beta) \times \cos(2\alpha - \beta)\right) \leftrightarrow (5\operatorname{tg}(2\alpha - \beta)\operatorname{ctg}(2\alpha + \beta) = 1) \Rightarrow (\operatorname{tg}(2\alpha - \beta) \times \operatorname{ctg}(2\alpha + \beta) = \frac{1}{5})$. 107. $\frac{7}{25}$. 108. 1. 109. 0.

## Глава VIII

7. $\left\{\frac{\pi}{4}(1 + 4n);\ \operatorname{arctg} 2 + k\pi\right\}$. 8. $\left\{-\frac{\pi}{4} + (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi\right\}$. 9. $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$. 10. $\left\{\frac{n\pi}{6}\right\}$. 11. $\left\{\frac{\pi}{24}(1 + 2n);\ \frac{n\pi}{4}\right\}$. 12. $\left\{\frac{n\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}(6k \pm 1)\right\}$. 13. $\left\{\operatorname{arctg} 2 + k\pi;\ -\operatorname{arctg}\frac{2}{7} + k\pi\right\}$. 14. $\left\{\frac{\pi}{6}(-1)^k + k\pi\right\}$. 15. $\left\{\pm\frac{\pi}{8} + k\pi;\ \frac{\pi}{8}(1 + 2k)\right\}$. 16. $\left\{\frac{\pi}{4}(2k + 1)\right\}$. 17. $\left\{\frac{\pi}{2}(4k+1)\right\}$. 22. $\left\{\frac{\pi}{4} + n\pi\right\}$. 23. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi\right\}$. 24. $\left\{-\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + n\pi\right\}$. 25. $\left\{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right\}$. 26. $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2};\ -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{k\pi}{2}\right\}$. 27. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$. 28. $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$. 33. $\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi;\ 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{5} + 2k\pi\right\}$. 34. $\left\{-\frac{\pi}{18} + (-1)^k\frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3}\right\}$. 35. $\left\{2k\pi - \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}\right\}$. 36. $\varnothing$. 37. $\left\{\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}5 + k\pi;\ \frac{\pi}{6}(1 + 2k) - \frac{1}{6}\operatorname{arctg} 1{,}5\right\}$. 38. $\left\{\frac{1}{4}(\operatorname{arctg} 2{,}4 + 2k\pi);\ \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 2{,}4 + \pi(1+2k))\right\}$. 44. $\left\{\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1 \pm \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + 2n\pi\right\}$. Произвести замену $\sin x + \cos x = y$. 45. $\left\{2k\pi;\ \frac{\pi}{2} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{7}{5\sqrt{2}} + 2k\pi\right\}$. 46. $\left\{\frac{\pi}{2}(3 + 4n);\right.$

$\frac{\pi}{2}(8n \pm 1)\Big\}$. 47. $\Big\{\frac{\pi}{4}(4n+1)\Big\}$. 48. $\Big\{\frac{\pi}{4}(1+2n)\Big\}$. 49. $\Big\{-\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+$ $+\pi n\Big\}$. 50. $\Big\{\pi(1+2n);\ \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)\Big\}$. 51. $\Big\{\frac{\pi}{6}(1+12n)$; $\frac{\pi}{6}(5+12n)\Big\}$. 52. $\Big\{-\frac{\pi}{4}+n\pi;\ \pm\frac{\pi}{6}+n\pi\Big\}$. 57. $\Big\{-\frac{\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{18}+\frac{k\pi}{2}\Big\}$. Преобразовать левую часть уравнения к виду $\frac{\cos(2x+40^\circ)}{\sin(x-25^\circ)\cos(3x+15^\circ)}$, затем произвести замену $2x+40^\circ=t$. 58. $\Big\{\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\ \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}\Big\}$. Левую часть уравнения представить в виде $(\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x)^2=(2\operatorname{ctg}2x)^2$. 59. $\Big\{\frac{\pi}{6}(1+2k);\ \frac{\pi}{12}(1+2k)\Big\}$. 60. $\Big\{\frac{\pi}{4}(1+4n);\ (-1)^k\arcsin(\sqrt{2}-1)+k\pi\Big\}$. 61. $\Big\{\frac{\pi}{4}(4n-1)$; $\frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)\Big\}$. 62. $\Big\{n\pi;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\Big\}$. 63. $\Big\{\frac{\pi}{2}(1+2n);\ \frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)$; $(-1)^n\frac{\pi}{6}+n\pi\Big\}$. 64. $\Big\{\pi(1+2k);\ \frac{\pi}{4}+\pi n\Big\}$. 65. $\Big\{\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{\sqrt{8}}+$ $+\pi(1+2n)\Big\}$. 66. $\Big\{2n\pi;\ \frac{\pi}{4}(1+8n)\Big\}$. 67. $\Big\{\frac{\pi}{2}(3+4n)$; $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}+2\pi n\Big\}$. 68. $\Big\{\frac{n\pi}{2}\Big\}$. 69. $\Big\{\frac{\pi}{2}(1+2n);\ \frac{\pi}{4}(4n \pm 1)\Big\}$. 70. $\Big\{\frac{\pi}{5}(2n+1)\Big\}$. 71. $\Big\{\frac{n\pi}{3};\ \frac{\pi}{8}(1+2n)\Big\}$. 72. $\Big\{\frac{\pi}{10}(1+2n)\Big\}$. 73. $\Big\{(-1)^n\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2}\Big\}$. Представить левую часть уравнения в виде $\Big(\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\Big)^2$. 74. $\Big\{\frac{2n\pi}{5};\ \frac{\pi}{9}(6n \pm 1)\Big\}$. 75. $\Big\{\frac{\pi}{4}+\pi n\Big\}$. 76. $\{\pi(2n+1)\}$. 77. $\Big\{\frac{\pi}{4}(1+4n)\Big\}$. 78. $\Big\{n+\frac{1}{12};\ k-\frac{1}{4}\Big\}$. 85. $\Big\{\frac{\pi}{4}+2n\pi\Big\}$. Решение. $\Big((\sin x+\cos x)\sqrt{2}=\frac{2}{\sin 2x}\Big) \leftrightarrow$ $\leftrightarrow\Big(2\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{2}{\sin 2x}\Big) \leftrightarrow\Big(\sin 2x\sin\Big(x+\frac{\pi}{4}\Big)=1\Big) \leftrightarrow\Big(\cos\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)-$ $-\cos\Big(3x+\frac{\pi}{4}\Big)=2\Big) \Rightarrow \begin{cases}\cos\Big(x-\frac{\pi}{4}\Big)=1,\\ \cos\Big(3x+\frac{\pi}{4}\Big)=-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x-\frac{\pi}{4}=2\pi n,\\ 3x+\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi.\end{cases}$ 86. $\Big\{\frac{\pi}{2}(1+2n)\Big\}$. Уравнение равносильно системе $\begin{cases}\operatorname{ctg}x=0,\\ \sin 2x=0.\end{cases}$

87. $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$. 88. $\left\{-\frac{5\pi}{12}+n\pi\right\}$. 89. $\left\{\left(k\pi;\ \frac{\pi}{6}(4n+1)\right)\right\}$. Решение. Так как $2+\sec^2 x \geqslant 3$, $4-2\cos^4 x \geqslant 2$, то левая часть уравнения не меньше 6. Правая часть уравнения не больше 6. Таким образом, уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos^4 x = 1,\\ \sin 3y = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x = k\pi,\\ 3y = \frac{\pi}{2}+2n\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = k\pi,\\ y = \frac{\pi}{6}(4n+1).\end{cases}$$

90. $\{\pi(1+4n)\}$. 91. $\varnothing$. 96. $\{0,6\}$. 97. $\left\{\sqrt{\frac{3}{28}}\right\}$. 98. $\left\{\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right\}$. 99. $\{0;\ 1\}$. 100. $\{0;\ \pm 0{,}5\}$. Решение. $(\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}(x+1) = \operatorname{arctg} 3x - \operatorname{arctg} x) \Rightarrow (\alpha+\beta=\gamma-\delta$, где $\operatorname{tg}\alpha = x-1$, $\operatorname{tg}\beta = x+1$, $\operatorname{tg}\gamma = 3x$, $\operatorname{tg}\delta = x)$. Далее имеем $(\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}(\gamma-\delta)) \Rightarrow \Rightarrow \left(\frac{2x}{1-(x^2-1)} = \frac{3x-x}{1+3x^2}\right)$. 101. $\left\{\frac{2}{3}\right\}$. 106. $\left\{\frac{\pi}{12}(6n\pm 1)\right\}$. 107. $\left\{\frac{n\pi}{2};\ \frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}\right\}$. 108. $\varnothing$. 109. $\left\{\frac{n\pi}{3}\right\}$. 110. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right\}$. 111. $\left\{\operatorname{arctg}\sqrt[3]{\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}}+n\pi\right\}$. 112. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4n)\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}(1+4n)\right)^2-2},\right.$ $n\neq 0$; $\left.\frac{\pi}{4}(4k-1)\pm\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}(4k-1)\right)^2+2}\right\}$. Решение. $\left(\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)\right) \Leftrightarrow \left(\cos x - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{x}\right)=0\right) \Leftrightarrow \left(2\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4}+\right.\right.$ $\left.\left.+\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{x}\right)=0\right) \Rightarrow \begin{cases}\frac{x}{2}+\frac{1}{x}-\frac{\pi}{4}=n\pi,\\ \frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{x}=k\pi.\end{cases}$ 113. $\left\{2n\pi;\right.$ $\left.\frac{\pi}{2}+2n\pi\right\}$. Решение. $(3\sin x+\sin 2x = 3(1-\cos x)) \Leftrightarrow (3(\sin x+$ $+\cos x)+\sin 2x+1=4) \Leftrightarrow \begin{cases}3y+y^2=4,\\ y=\sin x+\cos x\end{cases} \Rightarrow (\sin x+\cos x=1)$. 114. $\left\{-\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{2};\ \frac{2\pi}{3}+n\pi\right\}$. Решение. $\left(8\cos x+\frac{\sqrt{3}}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}=\right.$ $\left.=0\right) \Rightarrow (4\sin 2x\cos x+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0) \Leftrightarrow (2(\sin 3x+\sin x)+$ $+\sqrt{3}\cos x-\sin x=0) \Leftrightarrow (2\sin 3x+\sqrt{3}\cos x+\sin x=0) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(2\sin 3x+2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=0\right) \Leftrightarrow \left(2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=0\right)$. 115. $\left\{-\frac{\pi}{4}+2\pi n\right\}$. Решение. $\left(2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2}{\sin 2x}\right) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left(\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=2\right) \Rightarrow \begin{cases}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1,\\ \cos\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=-1\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi, \\ 3x - \frac{\pi}{4} = \pi + 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \left(x = -\frac{\pi}{4} + 2n\pi\right)$. 116. $\left\{\pm \frac{\pi}{6} + n\pi\right\}$.

Решение. $(3(\operatorname{ctg} 2x - \operatorname{ctg} 3x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 3x) \Leftrightarrow \left(3\frac{\sin x}{\sin 2x \sin 3x} = \right.$
$\left. = \frac{\cos x}{\cos 2x \sin 3x}\right) \Leftrightarrow (3\cos 2x = 2\cos^2 x) \Leftrightarrow (3\cos 2x = 1 + \cos 2x) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\cos 2x = \frac{1}{2}\right)$. 117. $\left\{29^\circ + \frac{\alpha}{2} - 180^\circ n;\quad 37^\circ - \frac{\alpha}{4} + 90^\circ n,\right.$ где
$\left.\alpha = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right\}$. Решение. $(5\cos(45^\circ + x) + 12\sin(45^\circ + x) =$
$= 13\sin(3x - 13^\circ)) \Leftrightarrow (13\sin(45^\circ + x + \alpha) = 13\sin(3x - 13^\circ))$.
118. $\left\{\frac{\pi}{12}(1 + 12n);\ \frac{\pi}{6}\left(\frac{5}{6} + 2n\right)\right\}$. Решение. $\left(2\sqrt{\sin 2x} + 1 = \right.$
$\left. = \frac{\sqrt{3}\operatorname{tg} 2x}{2\sqrt{\sin 2x - 1}}\right) \Rightarrow (4\sin 2x - 1 = \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x) \Rightarrow (2\sin 4x = \sqrt{3}\sin 2x +$
$+ \cos 2x) \Leftrightarrow \left(\sin 4x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)\right)$. 119. $\left\{\pm \arccos\frac{1}{3} + n\pi;\right.$
$\left.\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right) + n\pi\right\}$. 120. $\left\{\frac{\pi}{4}(3 + 2n);\quad \frac{\pi}{8}(1 + 2n)\right\}$.
121. $\left\{\frac{2\pi}{3}(3n \pm 1)\right\}$. 122. $\left\{\frac{n\pi}{2}\right\}$. 123. $\left\{\frac{\pi}{2}(1 + 2n);\ 2n\pi\right\}$.
124. $\left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{\sqrt{6} - 2}{2} + n\pi\right\}$. 125. $\left\{\pm\arccos\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 2n\pi\right\}$.
Решение. $\left((\sin x + \cos x + 1) + (\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x + 2) + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = \right.$
$\left. = 0\right) \Leftrightarrow \left((\sin x + \cos x + 1) + \frac{(\sin x + \cos x)^2}{\sin x \cos x} + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} = 0\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left((\sin x + \cos x + 1)\left(1 + \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x}\right) = 0\right)$. 126. $\left\{\frac{n\pi}{2};\ \frac{1}{2} \times\right.$
$\left. \times \left(\pm\arccos\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) + 2n\pi\right)\right\}$. 127. $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$. 128. $\left\{\frac{\pi}{5}\left(n \pm \frac{1}{6}\right)\right\}$.
Решение. $\left(\cos 8x + 3(\cos 4x + \cos 2x) - 8\cos x \cos^3 3x = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\cos 8x + 6\cos x \cos 3x - 8\cos x \cos^3 3x = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\cos 8x - 2\cos x \times\right.$
$\left. \times (4\cos^3 3x - 3\cos 3x) = -\frac{1}{2}\right)$. Применяя формулу 22, гл. VII, имеем
$\left(\cos 8x - 2\cos x \cos 9x = -\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \left(\cos 8x - (\cos 8x + \cos 10x) = -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\cos 10x = \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left(10x = \pm\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$. 129. $\left\{\frac{\pi}{2}(4n - 1)\right\}$.

130. $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$. 131. $\left\{\frac{\pi}{4}(1+4n)\right\}$. Решение. $\left(1-\frac{\cos 2x}{2}=\right.$ $\left.=\operatorname{tg}x\right)\Leftrightarrow\left(1-\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}\cos 2x\right)\Leftrightarrow\left(\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}=\frac{1}{2}(\cos^2 x-\sin^2 x)\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left((\cos x-\sin x)\left(1-\frac{1}{2}\cos x\,(\cos x+\sin x)\right)=0\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x-\sin x=0,\\ 1-\frac{1}{2}\cos x\times\\ \times(\cos x+\sin x)=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0,\\ 2\sin^2 x+\cos^2 x-\cos x\sin x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x-\frac{\pi}{4}=n\pi,\\ 2\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x+1=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{4}+n\pi,\\ x\in\varnothing.\end{array}\right.$$

## Глава IX

5. $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{4}+n\pi;\ n\pi\right)\right\}$. 6. $\left\{\left(\operatorname{arctg}\frac{4}{3}+n\pi;\ -\operatorname{arctg}8+n\pi\right),\right.$ $\left.\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+n\pi;\ -\operatorname{arctg}2+n\pi\right)\right\}$. 7. $\left\{\left((-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}+n\pi;\right.\right.$ $\left.\left.\frac{3\pi}{2}-(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}-n\pi\right)\right\}$. 8. $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+2n\pi;\ \frac{\pi}{6}+2k\pi\right),\right.$ $\left.\left(\frac{3\pi}{10}+2n\pi;\ \frac{\pi}{10}+2k\pi\right)\right\}$. 9. $\left\{\left(\pm\frac{\pi}{4}+\left(\frac{k+2n}{2}\right)\pi;\ \mp\frac{\pi}{8}+\right.\right.$ $\left.\left.+\left(\frac{k-2n}{2}\right)\pi\right)\right\}$. 10. $\left\{\left(\pi(k+n)\pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}\pm\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}\right);\right.\right.$ $\left.\left.\pi(n-k)\pm\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}-\arccos\frac{a^2+b^2-2}{2}\right)\right)\right\}$. 11. $\left\{\left(\frac{b}{2}+\right.\right.$ $\left.\left.+n\pi\pm\frac{1}{2}\arccos(2a-\cos b);\quad -\frac{b}{2}+n\pi\pm\arccos(2a-\cos b)\right)\right\}$. 12. $\left\{\left(\frac{b}{2}+2n\pi\pm\arccos\frac{a}{2\sin\frac{b}{2}};\right.\right.$ $\left.\left.-\frac{b}{2}+2n\pi\pm\arccos\frac{a}{2\sin\frac{b}{2}}\right)\right\}$. 13. $\left\{\left(-\frac{d}{2}+n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{p}{2\sin\frac{d}{2}};\right.\right.$ $\left.\left.\frac{d}{2}+n\pi+\right.\right.$ $\left.\left.+(-1)^n\arcsin\frac{p}{2\sin\frac{d}{2}}\right)\right\}$. 14. $\left\{\left(\pm\arcsin\frac{\sqrt{(1-c)b}}{\sqrt{a^2-b^2}}+n\pi;\right.\right.$ $\left.\left.\pm\arccos\frac{a\sqrt{1-c}}{\sqrt{a^2-p^2}}+n\pi\right)\right\}$. 15. $\left\{\left(\frac{\pi}{4}+n\pi;\ \frac{\pi}{6}+k\pi\right)\right\}$. 16. $\left\{\left(\frac{a}{2}+k\pi\pm\right.\right.$ $\left.\left.\pm\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin a}{m}-\cos a\right);\ \frac{a}{2}-k\pi\mp\frac{1}{2}\arccos\left(\frac{2\sin a}{m}-\cos a\right)\right)\right\}$,

$a \neq k\pi$, $|m| \geqslant |\sin a|\Big\}$. 17. $\left\{\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} 2 - k\pi;\ \operatorname{arctg} 2 + k\pi\right),\right.$ $\left.\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2} - k\pi;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + k\pi\right)\right\}$. 18. $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi;\ \frac{\pi}{6} - 2k\pi\right)\right\}$. 19. $\left\{\left(\frac{\pi}{4} - k\pi - \operatorname{arctg}\frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2(1-\sqrt{2})};\quad \operatorname{arctg}\frac{-2 \pm \sqrt{3}}{2(1-\sqrt{2})} + k\pi\right)\right\}$. 20. $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{3}(6n \pm 1)\right\}\right.$. 21. $\left\{\left(\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{\pi}{3} - k\pi\right),\ \left(\frac{\pi}{3} + n\pi;\right.\right.$ $\left.\left.\frac{\pi}{2} - n\pi\right)\right\}$. 22. $\left\{\left(\frac{\pi}{6} + n\pi;\ \frac{\pi}{6} - n\pi\right)\right\}$. 35. $\left]\frac{\pi}{8} + n\pi;\ \frac{3\pi}{8} + n\pi\right[ \cup$ $\cup \left]-\frac{\pi}{8} + n\pi;\ n\pi\right[ \cup \left]\frac{\pi}{2} + n\pi;\ \frac{5\pi}{8} + n\pi\right[$. 36. $]2n\pi;\ \pi(2n+1)[$. 37. $\left]2n\pi - \frac{19\pi}{36};\quad 2n\pi - \frac{\pi}{18}\right[ \cup \left]2n\pi + \frac{17\pi}{36};\quad (2n+1)\pi\right[$. 38. $\left]\frac{\pi}{4} + 2n\pi;\ \pi\left(\frac{5}{4} + 2n\right)\right[$. 39. $\left]\frac{\pi}{10}(4n-1);\ \frac{\pi}{30}(12n-1)\right[ \cup$ $\cup \left]\frac{\pi}{10}(4n+1);\quad \frac{\pi}{30}(12n+7)\right[$. 40. $\left]\frac{5\pi}{12} + 2n\pi;\quad \pi\left(\frac{13}{12} + n\right)\right[$. 41. $\left]\pi\left(n + \frac{1}{2}\right);\quad \pi(n+1)\right[$. 42. $\left]-\frac{\pi}{4} + 2n\pi;\ \frac{\pi}{6} + 2n\pi\right[ \cup \left]\frac{\pi}{4} +$ $+ 2n\pi;\ \frac{3\pi}{4} + 2n\pi\right[ \cup \left]\frac{5\pi}{6} + 2n\pi;\ \frac{5\pi}{4} + 2n\pi\right[$. 43. $\left[\frac{k\pi}{8};\ \frac{\pi}{48}(1+6k)\right[$. 44. $\left[-\frac{7\pi}{12} + n\pi;\quad -\frac{\pi}{2} + n\pi\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{2} + n\pi;\quad \frac{\pi}{12} + n\pi\right]$. 45. $x \neq \frac{\pi}{2}(1+2n)$. 46. $\left]\frac{\pi}{18}(12n-7);\ \frac{\pi}{18}(12n+1)\right[$. 47. $\left]\frac{\pi}{4} + n\pi;\right.$ $\left.\frac{3\pi}{4} + n\pi\right[$. 48. $\left]\frac{\pi}{3}(6n-1);\quad \frac{\pi}{3}(6n+1)\right[$. 49. $\left]-\frac{\pi}{6} + k\pi;\right.$ $k\pi\left[ \cup \left[k\pi;\quad \frac{\pi}{6} + k\pi\right[$. 50. $\left]\frac{\pi}{2} + k\pi;\ \frac{5\pi}{9} + k\pi\right[ \cup \left]k\pi;\quad \frac{2\pi}{9} +\right.$ $\left. + k\pi\right[ \cup \left]-\frac{\pi}{3} + k\pi;\ -\frac{\pi}{9} + k\pi\right[$.

**Глава X**

6. $\{2\}$. 9. $\left\{\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$. Решение аналогично примеру 1. 10. $\{0; -19\}$. 11. $\{(3; 4)\}$. Решение. Имеем $(x^2 - 6x + 9 + y - 4\sqrt{y} + 4 = 0) \Leftrightarrow ((x-3)^2 + (\sqrt{y} - 2)^2 = 0) \Rightarrow \begin{cases} x - 3 = 0, \\ \sqrt{y} - 2 = 0. \end{cases}$ 12. $\varnothing$. 13. $\varnothing$. 14. $\varnothing$. 15. $\{0\}$. Имеем $2\cos^2\frac{x^2+x}{6} \leqslant 2$; $2^x + 2^{-x} \geqslant 2$. Следовательно, получим систему $\begin{cases} \cos^2\frac{x^2+x}{6} = 1, \\ 2^x + 2^{-x} = 2. \end{cases}$ 16. $\{2;$

$(1+\sqrt{3})^4-2\}$. Произвести подстановку $(1+\sqrt{3})^x=y$. 17. $\{1\}$. 18. $\left\{2;\ \frac{1}{8};\ 4\right\}$. 19. $\left\{\frac{5}{4}\right\}$. 20. $\{49^{\frac{\lg 5-\lg 13}{\lg 5-\lg 7}}\}$. 21. $\{3\}$. 22. $\left\{\frac{5}{3};\ \frac{5}{4}\right\}$.

Решение. Имеем $\left(\left(x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2\right)\Rightarrow\left(\frac{x^2}{x^2-1}+2\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\left(\frac{35}{12}\right)^2\right)\Rightarrow\left(y^2+2y=\left(\frac{35}{12}\right)^2,\ \text{где}\ y=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}\right)$. Далее $\left((y+1)^2=\left(\frac{35}{12}\right)^2+1\right)\Rightarrow\left(y=\frac{25}{12}\right)\Rightarrow\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}\right)\Rightarrow\left(\sqrt{x^2-1}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{25}{12}\right)\Rightarrow\left(t+\frac{1}{t}=\frac{25}{12},\ \text{где}\ t=\sqrt{x^2-1}\right)$.

27. $\left\{-\frac{37}{19};\ 2\right\}$. 28. $\left\{2\pi n\pm\frac{\pi}{8};\ 2\pi n\pm\frac{3\pi}{8}\right\}$. 29. $\left\{\operatorname{ctg}\frac{2}{k};\ \left(k>\frac{2}{\pi}\right)\right\}$. 30. $\left\{2\pi n+\frac{\pi}{8};\ 2\pi n+\frac{3\pi}{8};\ 2\pi n+\frac{5\pi}{8};\ 2\pi n+\frac{7\pi}{8}\right\}$. 31. $\{-\log_3\sqrt{6}\}$. 32. $\left\{\frac{1}{2}\sin 1\right\}$. 33. $\left\{2\pi n\pm\arccos\left(\log_2\frac{1+\sqrt{13}}{4}\right)\right\}$. 34. $\left\{\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\pm\frac{\pi}{3}\right\}$. 35. $\{10^{2k+\frac{1}{2}};\ 10^{2k}\}$. 36. $\left\{\pi k+\frac{\pi}{4}(-1)^k\right\}$. 37. $\left\{-\log_2^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right),\ n\geqslant 1\right\}$. 38. $\{\sqrt{3}\}$. 39. $\{\sqrt{3}\}$. 40. $\{4\}$. 41. $\left\{\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}$. Выполнить преобразования:

$$0{,}25^{\frac{\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2x}}=2^{\frac{-2\sin^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{-\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)}}=2^{\operatorname{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

42. $\{\sqrt[10]{10}\}$. 43. $\{10\sqrt{10}\}$. 44. $\{9\}$. 45. $\{7\}$. 46. $\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi\right\}$. 47. $\left\{2\pi n;\ \frac{\pi}{6}+2\pi n\right\}$. 53. $]1;\ \infty[$. 54. $\left]\frac{3}{4};\ \frac{5}{4}\right\}$. 55. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$. Неравенство равносильно системе $0<2x^2+x+1<1$. 56. $]-\infty;\ -2[$. После преобразований решить неравенство $\log_2\log_3\frac{x-1}{x+1}<0$. 57. $\left]\frac{2\pi n}{3}-\frac{\pi}{6};\ \frac{2\pi n}{3}+\frac{\pi}{18}\right[$. 58. $]-\infty;\ \frac{1}{5}[\cup]5;\ +\infty[\cup\left]\frac{8k+13}{8k+9};\ \frac{8k+7}{8k+3}\right[,\ k\neq 1$. 59. $\left]2k+\frac{4}{3};\ 2k+2\right[$. 60. $]k\pi;\ \frac{\pi}{3}+k\pi[\cup\left]\frac{\pi}{2}+k\pi;\ \frac{2\pi}{3}+k\pi\right[$. 61. $\left]0;\ \frac{1}{4}\right[$. 62. $\left]\frac{1}{\sqrt{2}};\ 1\right[\cup]-1;\ -\frac{1}{\sqrt{2}}[$. 63. $]3;\ 4[\cup]6;\ +\infty[$. 64. $]-\infty;\ -1[\cup]0;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$. 65. $]-\infty;\ \log_{\frac{2}{3}}2[\cup]\log_{1,5}2;\ +\infty[$. 66. $]-2;\ 2[$. 67. $]1;\ \sqrt[5]{2}[\cup]8;\ +\infty[$.

88. $]-1;\ 0[\ \cup\ \left]\frac{1}{2};\ +\infty\right[$. Прологарифмировать обе части неравенства. 89. $]0;\ 1[\ \cup\ ]2;\ +\infty[$. 70. $]-\infty;\ -3[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$. Произвести замену $\left(\sqrt[3]{5+\sqrt{24}}\right)^x = t$, тогда $\left(\sqrt[3]{5-\sqrt{24}}\right)^x = \frac{1}{t}$. 71. $\left]\frac{1}{2};\ 32\right[$. 72. $]0,1;\ 10[$. 73. $\left[0;\ \log_2\frac{5}{4}\right[\ \cup\ ]\log_2 3;\ +\infty[$. Выполнить преобразования $\log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1}-2) = -\log_2 2(2^x-1) = -(1+\log_2(2^x-1))$, затем произвести замену $\log_2(2^x-1) = t$. 74. $\left]\frac{7\pi}{2}+2+6n\pi;\ \frac{11\pi}{2}+2+6n\pi\right[$. 75. $\left]1-\left(2n\pi+\frac{7\pi}{4}\right)^2;\ 1-\left(2n\pi+\frac{\pi}{4}\right)^2\right[$; 76. $]3;\ \infty[\ \cup\ \left]\frac{6n+3}{6n+1};\ \frac{3n+1}{3n}\right[$, $n \neq 0$. 77. $\left]n\pi+\operatorname{arctg}\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{8}\right);\ \operatorname{arctg}\left(\frac{k}{2}+\frac{1}{4}\right)+n\pi\right[$. 78. $\left]-2;\ -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{\sqrt{3}-1}{2};\ 1\right[$. 79. $\left]-\infty;\ \frac{1}{1-\lg 2}\right[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. 80. $\left]0;\ \frac{1}{4}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{2};\ 1\right[$. 81. $\left]-\infty;\ -3\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{4};\ 1\right[$. 82. $]-31{,}5;\ 0{,}5[\ \cup\ ]0{,}5;\ 32{,}5[$. 83. $]-\infty;\ +\infty[$. 84. $\left]-\frac{5}{4};\ +\infty\right[$. 85. $]3;\ 4[\ \cup\ ]4;\ +\infty[$. 91. $\left\{\frac{a^2-4a}{2(1+2a)}\right\}$ при $a \in \left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\ \cup\ ]-\infty;\ -2[$. 92. $\left\{7+\left(\frac{a^2-4}{2a}\right)^2\right\}$ при $a \in ]2;\ +\infty[$. 93. $\{0;\ (a+2)^{-2}\}$ при $a \in ]-\infty;\ -2[$. 94. $\left\{\left(\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}\right)^2;\ a+\frac{\sqrt{4a+3}-1}{2}\right\}$. 95. $\left\{\frac{(a-b)^2}{4b}\right\}$ при $a > b > 0$. 96. $\left\{\left(\frac{a+b+2}{2}\right)^2 - 2b\right\}$ при $a+b \leqslant -2$. 97. $x \in ]-\infty;\ +\infty[$ при $a = 0$; $\left\{\pm a;\ \pm\sqrt{a^2+\frac{1}{32}}\right\}$ при $a \neq 0$. 98. $\left\{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{b}-\sqrt{\frac{b+a}{2}}\right)^4}\right\}$ при $b > a > 0$. Возвести обе части уравнения в четвертую степень. 99. $\left\{\frac{a(c-1)}{c+1}\right\}$ при $c = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6$, $a > 0$. Разделить обе части уравнения на $\sqrt[3]{a-x}$, затем произвести замену $\sqrt[6]{\frac{a+x}{a-x}} = t$. 100. $]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ при $a = 1$; $\{a^{-0,5};\ a^{-\frac{4}{3}}\}$ при $a \in ]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$. 101. $\left\{b;\ \frac{1}{b}\right\}$ при $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$. 102. $\{(x;\ x)\}$ при $a = 0$; $\left\{\left(\frac{2a}{3};\ \frac{4a}{3}\right),\ (2a;\ -4a)\right\}$ при $a \neq 0$. 103. $\left\{\left(\sqrt[3]{\frac{tb}{t+1}};\right.\right.$

$\sqrt{\frac{b}{t(t+1)}}\Big)\Big\}$ при $t=\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{b}\pm\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^2-4}\right)$. 104. $\{((ba^q)^{\frac{1}{qp-1}};$ $(ba^p)^{\frac{1}{qp-1}}$ при $qp\neq 1$, $a>0$, $b>0$. 105. $\{(a^{4m-6n};\ a^{6m-12n})\}$ при $b>0$, $a\neq 1$. 106. $\left\{\left(\frac{1}{4b}(b^2+a^2\pm\sqrt{(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)});\ \frac{b^2+a^2}{2b}-x\right)\right\}$, при $b>|a|>0$. 107. $a=1$. Решение. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=a-2$. Далее $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=a^2-2(a-2)=(a-1)^2+3$. Сумма квадратов будет наименьшей, если $a-1=0$. 108. $\left\{\frac{3\pm\sqrt{17}}{2};\ 2;\ 1\right\}$. 109. $m=-5$; $n=30$; $x_3=-2{,}5$. 110. $m=12$; $x_2=-\frac{3}{2}$; $x_3=\frac{2}{3}$.

## Глава XI

9. 1. 10. $-\frac{2}{3}$. 11. 1 при $x\to+\infty$; $-1$ при $x\to-\infty$. 12. $-\frac{1}{2}$. 13. $-\frac{1}{2}$. 14. 1. 19. 0. 20. 0. 21. 1. 22. $\frac{3}{2}$. 23. $-\frac{2}{3}$. 24. $-\frac{1}{2}$ при $x\to+\infty$; $\frac{1}{2}$ при $x\to-\infty$. 25. $\pi$. 26. 4. 27. $\frac{1}{2}$. 28. $\frac{1}{2}$. 29. 1. 35. 1. 36. $-1{,}4$. 37. $-\frac{4}{3}$. 38. 2. 39. $\frac{1}{6}$. 40. $-\frac{21}{4}$. 41. $-\sqrt{2}$. 42. 0. 43. $-7{,}2$. 44. $\infty$. 45. $\frac{4}{3}$. Решение. Пусть $A=\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{4+x}-2}$. Обозначим $\sqrt[3]{x+1}=t$, тогда $x=t^3-1$. Далее имеем $A=\frac{t-1}{\sqrt{3+t^3}-2}=\frac{(t-1)(\sqrt{3+t^3}+2)}{3+t^3-4}=$ $=\frac{\sqrt{3+t^3}+2}{t^2+t+1}$; $\lim\limits_{x\to 0}A=\lim\limits_{t\to 1}A=\frac{4}{3}$. 46. 1. Заменить эквивалентными величинами $\operatorname{tg}2x\sim 2x$; $\sin 2x\sim 2x$. 47. $\frac{1}{4}$. Преобразовать $\frac{1-\sin x}{1+\cos 2x}=\frac{1-\sin x}{2\cos^2 x}=\frac{1-\sin x}{2(1-\sin^2 x)}=\frac{1}{2(1+\sin x)}$. 48. 0. Преобразовать: $\frac{\sin 2x-2\operatorname{tg}x}{\cos x-1}=\frac{2\sin x\cos x-2\operatorname{tg}x}{\cos x-1}=\frac{2\sin x(\cos^2 x-1)}{\cos x(\cos x-1)}=$ $=\frac{2\sin x(\cos x+1)}{\cos x}$. 52. $\frac{1}{3}$. 53. 7. 54. $\frac{13}{16}$. 55. $-\frac{1}{2}$. 56. $-\frac{1}{6\sqrt{8}}$. 57. $\frac{9}{2}$. 58. 2. 59. $-\frac{1}{13\sqrt{7}}$. 60. 2. 61. 0,4. 62. $\frac{1}{4}$. 63. 4. 64. $\frac{1}{2}$. 65. $2\sqrt{2}$. 66. $\frac{9}{4}$. 67. 3.

6. $-20(3-4x)^4$. 7. $\left(2-\frac{3}{x}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{-2}$. 8. $3(4x^3-2x)(x^4-x^2+1)^2$.

9. $\frac{2x^3-6x^2+6x-1}{(x-1)^3}$. 10. $-0{,}16\sec^2\frac{1-4x}{5}\left(\operatorname{tg}\frac{1-4x}{5}\right)^{-\frac{4}{5}}$.

11. $(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}$. 12. $2^{x^2-\ln x}\left(2x-\frac{1}{x}\right)\ln 2$. 13. $\frac{1}{3}(x^4+5x)^{-\frac{2}{3}} \times$

$\times(4x^3+5)$. 14. $\frac{2\sec^2 x}{(1-\operatorname{tg} x)^2}$. 15. $\frac{15}{4}(5x-1)^{-\frac{1}{4}}$. 16. $\frac{6+2x}{(2+x)^{\frac{4}{3}}}$.

17. $6\sin^2 2x\cos 2x$. 18. $\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2x}{(1-x^2)^2}$. 19. $e^{1+\ln^2 x} \cdot \frac{2\ln x}{x}$.

20. $\frac{\sec^2 \ln\sqrt{x}}{2x}$. 21. $3^{\cos^2 x}(-\sin 2x)\ln 3$. 22. $e^{-x}(1-x)$.

23. $\frac{\cos\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$. 24. $\frac{-2}{3x^{\frac{2}{3}}\sin 2\sqrt[3]{x}}$. 25. $-\frac{2}{3}(2x-1)^{-\frac{4}{3}}$.

26. $-\frac{45}{4}x^2(x^3+2)^{-\frac{7}{4}}$. 27. $-\sin\ln^2 x \cdot \frac{2\ln x}{x}$. 28. $2(e^{\sin x}-1)e^{\sin x} \times$

$\times\cos x$. 29. $\frac{1-x^3-x}{\sqrt{1-x}(1+x)^{1,5}}$. 30. $\frac{6\cos 3x}{(1-\sin 3x)^2}$. 31. $2^{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2}$.

32. $\frac{x+2}{2\sqrt{x+3}(1+x\sqrt{x+3})^{\frac{2}{3}}}$. 33. $\frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln^2 x}}$. 34. $\frac{1}{\sqrt{x^2-2}}$.

35. $\operatorname{tg} 2x + 2x\sec^2 2x$. 36. $-10\cos^9\frac{5x-1}{2}\sin\frac{5x-1}{2}$. 42. $\{(0;\ 0),$ $(2;\ 0),\ (1;\ -1)\}$. Решить уравнение $y'=0$. 44. $\{(1;\ 0),\ (-1;\ -4)\}$.

45. $y-y_0=\frac{1}{3}(x-x_0)$, где $x_0=-1\pm\frac{\sqrt{16}}{3}$, $y_0=x_0^3+3x_0^2-5$.

46. $y=-9$. 47. $y=x+1$. 49. $\frac{\pi}{3}$. Угол между кривой и осью $Ox$ — угол наклона касательной к оси $Ox$. 50. $\left\{\left(2;\ \frac{8}{3}\right),\ (3;\ 3{,}5)\right\}$.

Решить уравнение $y'=\operatorname{tg} 45°=1$. 51. $\left(\frac{1}{2};\ -\frac{15}{32}\right)$. 52. $y=-20x-55$ и $y=-13x-20$ в точке $(-5;\ 45)$; $y=8x-13$ и $y=x+1$ в точке $(2;\ 3)$. 53. $v=21$ м/с, $a=24$ м/с$^2$. 54. $\frac{1}{13}$ м/с. 55. $t=1$, $t=4$. 56. 70 м/с. Решить уравнение $s''(t)=0$, затем найти $v$. 57. $v=-12$ м/с. 61. $\alpha=\pi\sqrt{\frac{8}{3}}$. Решение. $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H$, где

$2\pi r = R\alpha$; $R$ — радиус кругового сектора, $H = \sqrt{R^2 - r^2}$. Далее находим $r = \frac{R\alpha}{2\pi}$, затем $V(\alpha) = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{R^2 - \left(\frac{R\alpha}{2\pi}\right)^2}$. Решаем уравнение $V'(\alpha) = 0$. 62. $\frac{4}{5}p$; $\frac{3}{5}p$; $\frac{3}{5}p$. Обозначить основание треугольника $2x$, тогда боковая сторона равна $p - x$. 63. $\frac{2R}{\sqrt{3}}$. 64. $\frac{4R}{\sqrt{5}}$; $\frac{R}{\sqrt{5}}$.

## Глава XIII

7. {12}. 8. {4}. 9. {10}. 10. {27}. 11. {7; 14}. 12. {2}. 13. $T_5 = 21z^2$. 14. $x = 2$, $y = 3$, $z = 5$. 15. $T_{21} = C_{50}^{20} \cdot 2^{10}$. 16. $\{10^6\}$. 17. $T_5 = 210$. 18. 6. 19. 15015. 20. $x \in \left]\frac{5}{8}; \frac{20}{21}\right[$. 21. 40. 22. 62.

## Глава XIV

9. $\frac{5}{3}x^3 - x + C$. 10. $5(2x+7)^{\frac{1}{2}} + C$. 11. $-21\cos\frac{x}{3} + C$. 12. $\frac{1}{2}\operatorname{tg} 4x + C$. 12. $\frac{1}{20}(1+2x)^{10} + C$. 13. $4(5+0{,}5x)^{\frac{1}{2}} + C$. 14. $\frac{1}{9}\left(\frac{2}{5}(3x-1)^{\frac{5}{2}} - \frac{10}{3}(3x-1)^{\frac{3}{2}}\right) + C$. Произвести замену $3x-1=t$. 15. $\frac{8}{3}(2-0{,}5x)^{\frac{3}{2}} - 16(2-0{,}5x)^{\frac{1}{2}} + C$. Произвести замену $2-0{,}5x=t$. 16. $\frac{3x}{8} - \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} + C$. 17. $\frac{1}{2}\left(\frac{\sin 9x}{9} + \frac{\sin 5x}{5}\right) + C$. 18. $C - \sqrt{1-x^2}$. Произвести замену $\sqrt{1-x^2} = t$. 19. $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$. 20. $\frac{1}{4}\ln|3+2x^2| + C$. 21. $-\frac{4}{3}(1-x)^{\frac{3}{4}} + \frac{4}{7}(1-x)^{\frac{7}{4}} + C$. 22. $\frac{1}{2}\sqrt{3+2x^2} + C$. 23. $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + C$. 24. $-\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{7}(1-x)^{\frac{7}{3}} + C$. 25. $\frac{1}{3}\operatorname{tg} 3x + C$. 26. $6\sin\frac{x}{2} + C$. 27. $-\frac{3}{4}\operatorname{ctg} 4x + C$. 28. $C - \operatorname{tg}(1-2x)$. 29. $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$. 30. $-\frac{1}{4}\ln|1-4x| + C$. 32. $\frac{(1-3x)^6}{-12}$. 33. $\frac{1}{5}(\operatorname{tg} 5x - 1)$. 34. $\frac{x^4}{4} + 1$.

35. $\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{4}x^4 + 1$. 36. $\frac{1-\cos 4x}{4}$. 37. $\frac{3}{8}((2x+3)^{\frac{4}{3}} - 8)$.
41. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. 42. $\frac{\pi}{4}$. 43. 3. 44. $\frac{3\pi}{8} + 1$. 45. $3\sqrt{3}$. 46. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
47. $\frac{3}{2}\sqrt{3}$. 48. $\frac{1}{5}$. 49. $\frac{45}{8}$. 50. $\frac{26}{3}$. 51. $\frac{\ln 4}{3}$. 52. $\frac{1}{2}\ln 3$.
53. $\frac{10}{27}\sqrt{2}$. 54. $\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\ln 4$. 55. $\frac{3\pi}{8}$. 56. $\frac{28}{3}$. 57. 0. 60. 4,5.
61. $\frac{1}{4}$. 62. $\frac{7}{15}$. 63. $2\ln 2 - 1{,}5$. 64. $\frac{45}{4}$. 65. 0.

## Глава XV

5. 1. 6. $-4$. 7. $-4$. 8. $-8(1 + i\sqrt{3})$. 9. $\left\{\pm\frac{i-1}{\sqrt{2}};\ \pm(1+i)\right\}$.
10. $\pm(1-i)$. 11. $\pm\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right)$ 12. $\{x \geqslant 0;\ y = x\}$.
13. $\{x \leqslant 0;\ y = 0\}$. 14. Область между лучами $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x \geqslant 0$. 15. Область между лучами $y = x$, $y = -x\sqrt{3}$, $y \geqslant 0$. 16. $x \geqslant 0$. 17. $\{0;\ i;\ -i\}$. 18. $\{6+17i;\ 6+8i\}$. 19. Все точки окружности $x^2 + y^2 = 1$. 29. 18°; 14,4°. 30. 20 м/мин; 15 м/мин; 280 м. 31. 9 км/ч. 32. 12 ч; 24 ч. 33. 24 ч; 18 ч. 34. 10 ч; 8 ч. 35. 10 ч. Решение. Так как первый рабочий проработал в 5 раз больше времени, чем последний, то число рабочих равно 5. Обозначим время работы последнего рабочего через $x$, тогда общее число человеко-часов равно $x + 2x + 3x + 4x + 5x = 15x$. Далее имеем $(15x = 5 \cdot 6) \Leftrightarrow (x = 2)$. 36. 8 л; 7 л. 37. 10 л. Решение. Обозначим $x$ — количество спирта, отлитого первоначально из первого сосуда во второй. Концентрация смеси во втором сосуде равна $\frac{x}{20}$. После дополнения первого сосуда смесью из второго сосуда количество спирта в первом сосуде стало равным $20 - x + \frac{x^2}{20}$. После отливания $6\frac{2}{3}$ л смеси в первом сосуде остается $13\frac{1}{3}$ л смеси, в которых содержится $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right)$ спирта. Составляем уравнение $\frac{2}{3}\left(20 - x + \frac{x^2}{20}\right) = 10$. Решая это уравнение, находим $x = 10$. 38. 9 и 3. 39. $\frac{1}{2}(a + 2b - c + \sqrt{(a+2b-c)^2 + 4bc})$, $\frac{1}{2}(a + 2b + c + \sqrt{(a+2b+c)^2 + 4bc})$. 40. $2ak$. Решение. Обозначим $s$ — расстояние от $A$ до $B$. Тогда до первой встречи первый велосипедист прошел $(s + a)$ км, а второй $(s - a)$ км. До второй встречи они прошли соответственно $\left(2s + \frac{1}{k}s\right)$ км и $\left(2s - \frac{1}{k}s\right)$ км. Так как

отношение скоростей равно отношению пройденных путей, то получим

$$\frac{s+a}{s-a}=\frac{2s+\frac{1}{k}s}{2s-\frac{1}{k}s}.$$

Решая это уравнение, находим

$$\left(\frac{s+a}{s-a}=\frac{2k+1}{2k-1}\right)\Rightarrow(s=2ak).$$

41. 75 руб.; 90 руб. 42. $t_1=6$ ч; $t_2=9$ ч. 43. 52 мин. 44. $x=\frac{pn-qm}{n-m}$; $y=\frac{1200(p-q)}{qm-pn}$ %. 45. $s=8a$; $v_1=\frac{8a}{3b}$; $v_2=\frac{8a}{5b}$. 46. 14 км/ч; 2 км/ч. 47. 16 с. 48. 3762. 49. $\frac{4}{15}$.

## Глава XVI

6. 6 см. 7. 4:5. 8. $6\frac{1}{4}$ см. 9. 7,5 см; 6,25 см. Решение. Обозначим боковую сторону через $x$, тогда основание равно $2\sqrt{x^2-25}$. Вычисляя площадь треугольника разными способами, имеем $\frac{1}{2}\cdot 6\cdot x=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\sqrt{x^2-25}$. Решая это уравнение, находим $x=\frac{25}{4}$. 10. $a=6$ см; $b=8$ см. 25. 4 ч; $\frac{10}{3}$ ч; 2 ч. 26. $\frac{18}{\sqrt{5}}$ см. 27. 8 см. 28. $\sqrt{\frac{s}{\sin\alpha}}$. 29. $\frac{2\pi}{\alpha}\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^{-2}$. Провести радиусы в точки касания сектора и круга, затем составить уравнение $R=r+\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$. 30. 1024 см$^2$. Высота трапеции равна полусумме оснований. 31. $\left(\frac{65}{32}\right)^2$. 32. 60 см$^2$. 33. $\left(\frac{r}{2}(\sqrt{4+\pi}+\sqrt{4-\pi});\ \frac{r}{2}(\sqrt{4+\pi}-\sqrt{4-\pi})\right)$. 34. $\pi\left(\frac{Ra}{R+a}\right)^2$. 35. $\frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. 36. 3,6 см$^2$. 37. $100\pi$ см$^2$. 38. $\frac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r}$. 39. $a$. 48. $a=\frac{\sqrt{c}}{2}(\sqrt{c+2h}+\sqrt{c-2h})$; $b=\frac{\sqrt{c}}{2}(\sqrt{c+2h}-\sqrt{c-2h})$. 55. Использовать теорему синусов для треугольников $DBO$, $OCE$ ($[DO]+[OE]=[DE]$). 56. Использовать решение задачи 17. 57. Использовать решение задачи 1. 70. Используя равенство $c^2=a^2+b^2$, доказать неравенство $c^3>a^3+b^3$ (см. гл. VI).

5. $2a^2\cos\beta\sqrt{1+\sin^2\beta}$; $\frac{2}{3}a^3\cos^2\beta\sin\beta$. 6. 144 см³. 7. $\frac{a^3}{12}\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$. 8. $\frac{a^2b}{12}\operatorname{tg}\alpha$. 9. 60,375 см³. 10. $\frac{4}{3}r^3\operatorname{tg}\beta\operatorname{cosec}\alpha$; $\frac{4r^3(1+\cos\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$. 16. $\frac{a^3-b^3}{6}\sqrt{2}\operatorname{tg}\beta$. 17. $4\sqrt{3}$ см³. 18. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{10\sqrt{5}}$. 19. 872 см³. 20. $\sqrt{\frac{PSQ}{2}}$. 21. $\frac{mnc^2\sqrt{4l^2-c^2}}{12(m^2+n^2)}$. 22. $Q\sqrt{3}$. 28. $\frac{2\sqrt{6}}{\pi^2}$. Использовать соотношение $\cos\alpha=\frac{S}{S_6}=\frac{1}{3}$ и решить уравнение $(\pi r^2=r)\Rightarrow\left(r=\frac{1}{\pi}\right)$. 29. $10\sqrt{19}$ см². 30. $\frac{1}{6}S\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\frac{2S}{\sin\beta}}$. 31. $\frac{a^2\sqrt{3}(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{4}$. 32. $\frac{1}{24}c^3\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 33. $\frac{abc\sqrt{2}}{3}$. Пирамиду расположить так, чтобы боковая грань (любая) стала основанием. 40. $\sqrt{6}$. 41. $\left(R\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$. 42. $\frac{l}{6}\sqrt{\frac{S(S^2+4Q^2)}{\pi}}$. 43. $\frac{\sqrt{2}}{6}\pi r^3$. 44. $\frac{a^2}{12}\sqrt{4b^2-2a^2}$; $a<b\sqrt{2}$. 45. $\frac{2}{3a}PS$. 46. $\frac{l^3}{12}$. 50. $\frac{c^3\sqrt{2}\sin^2 2\alpha\operatorname{tg}\beta}{48\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$. 51. $\frac{c^3\sin 2\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{12(1+\operatorname{ctg}\alpha)}$; $\frac{c^2\sin 2\alpha(1+\cos\beta)}{4\cos\beta}+$ $+\frac{c^3\cos\alpha\operatorname{tg}\beta}{2(1+\operatorname{ctg}\alpha)}$. 52. $\frac{a^3}{128}\operatorname{tg}\varphi$. 53. $\frac{6+3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{2}a^2$. 54. $\frac{ab(a^2+b^2+ab)}{3(a+b)}$. 55. $36\sqrt{2}$ см². 56. $\frac{1}{3}S\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 57. $\frac{1}{4}aS\sin\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha}{4}$. 58. $\frac{\pi}{12}(15-8\sqrt{2})$. 59. $\frac{2(m+n)}{m-n}\times$ $\times H^2\operatorname{ctg}\alpha\sqrt{2+\operatorname{ctg}^2\alpha}$. 60. $\frac{2\pi a^3\sec^2\frac{\pi q}{p+q}}{3\cos\alpha\sin 2\alpha}$. 61. $\frac{\pi l^3\sin 2\alpha\cos^2\alpha}{8\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. 62. $\frac{\sqrt{2}}{12}r^3\operatorname{tg}\beta\frac{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\frac{\alpha}{2}}$. 63. $2\sqrt{\frac{2S}{\sin 2\alpha}}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\right.$ $\left.-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\beta$. 64. $\frac{1}{8}V\sec^2\frac{\alpha}{2}$. 65. $\frac{1}{36}c^3\sqrt{1+3\cos^2\alpha}\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 66. $\frac{2}{3}l^3\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin 2\beta$. 67. $-\frac{2}{3}l^3\cos\frac{\beta}{2}\cos\beta\left(\sin\frac{\beta}{2}\right)^{-3}$. 68. $\frac{a^3\sin^2\alpha\operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}f}{6\left(\operatorname{tg}\varphi\cos\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}f\sin\frac{\alpha}{2}\right)}$. 69. $\frac{\sqrt{3(k^2-1)}}{\pi^3}$. 70. $\frac{\sqrt{3}}{4}q^3\left(1+\right.$

$+\sqrt{\frac{3(2m+n)}{n}}\Big)$. **74.** $\frac{1}{3}\pi b^3\sin^2\alpha$; $\pi b^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **75.** $\pi a^2(3+4\cos\alpha+\cos^2\alpha)$; $2\pi a^3\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$. **76.** $\frac{1}{2}\pi d^3\sin 2\alpha$; $2\sqrt{2}\pi d^2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$. **77.** $\frac{\pi p^3}{24\sqrt{2}}\sin^2 2\alpha\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right)^{-2}$. **78.** $\frac{\pi c^3}{6}\sin 2\alpha\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$. **83.** $\frac{5}{4}$. **84.** $\frac{a^2\sqrt{19}}{12}$. Для нахождения сторон сечения применить теорему косинусов. **85.** $-a^2\cos 2\beta\operatorname{cosec}\beta$. **86.** $\sqrt{6}$. Учесть, что апофема пирамиды конгруэнтна высоте основания. **87.** $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\varphi)\cos(\alpha-\varphi)}}{\cos\alpha\cos^2\varphi}$. **88.** $\frac{1}{2}a^3\sin\alpha$. Сечение пирамиды — треугольник с основанием, равным диагонали основания пирамиды. **89.** $\frac{7}{8}a^2\sec\alpha$. Использовать формулу $S_1=\frac{S}{\cos\alpha}$, где $S_1$—площадь сечения, $S$—площадь его проекции. **90.** $\frac{a}{2}\left(\frac{1}{4}+\sin 54^\circ\right)\times$ $\times\sqrt{b^2+2a^2\left(1-2\left(\sin 54^\circ-\frac{1}{4}\right)^2\right)}$. **95.** $\frac{\pi}{3}$. Составить уравнение $\frac{h}{2R-h}=\frac{1}{3}$, где $h$ — высота сегмента. **96.** $x=\arccos\frac{1}{\sqrt{8}}$; $\frac{r_1}{r_2}=\frac{3}{\sqrt{2}}$. **97.** $2\operatorname{arctg}\sqrt{3+\frac{3}{k^2}}$. **98.** $2\operatorname{arctg}\frac{4m}{\pi n}$. **99.** $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{5+4\cos\alpha}{5-4\cos\alpha}}$. **100.** $\arccos\left(\frac{b^2\sin\alpha}{a^2}\right)$. **102.** $\arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$. **103.** $4\sqrt{2}$. **104.** $\left(\frac{1}{2}\arcsin 2(\sqrt{2}-1);\ \frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin 2(\sqrt{2}-1)\right)$.

Р е ш е н и е. Обозначим: $a$ — меньший катет, $x$ — величина прилежащего угла. Объемы тел вращения равны соответственно

$$V_1=\frac{\pi}{3}a^3\operatorname{tg}^2 x,\quad V_2=\frac{\pi}{3}a^3\operatorname{tg}x,\quad V_3=\frac{\pi}{3}a^3\operatorname{tg}x\sin x.$$

Из условия задачи имеем $(V_1=V_2+V_3)\Rightarrow(\operatorname{tg}x=1+\sin x)\Rightarrow$ $\Rightarrow\left(\sin x-\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x\right)$. Возводя в квадрат обе части уравнения, получим $1-\sin 2x=\frac{1}{4}(\sin 2x)^2$. Далее имеем

$$\begin{cases}\sin 2x=y,\\ 1-y=\frac{1}{4}y^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sin 2x=y,\\ \left[\begin{array}{l}y=-2+2\sqrt{2},\\ y=-2-2\sqrt{2}\end{array}\right.\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\sin 2x=2(\sqrt{2}-1))\Rightarrow(2x=\arcsin 2(\sqrt{2}-1)).$$

**105.** $\arccos\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$; $2\operatorname{arcctg}\sqrt{\cos\beta}$. **106.** $2\pi\sin\frac{\alpha}{2}$. **107.** $\frac{\pi}{2}$.

108. $\arcsin\left(\cos\alpha\operatorname{cosec}\frac{\pi}{n}\right)$. Решение аналогично задаче 49.

109. $\arcsin\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}\operatorname{ctg}\alpha\right)$. 114. $\frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{3}}$. 115. $\frac{2}{3}r^3(R+\sqrt{R^2-r^2})$.

116. $\frac{3a^3}{4}$; $\frac{a^3\sqrt{2}}{32}$. 117. $\frac{\pi}{3}\cdot\frac{r^3\operatorname{tg}2\alpha}{\cos^3\alpha}$. 121. $\frac{a}{6}\sqrt{\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

122. $\arccos\frac{23}{26}$. 123. $\arccos 0{,}6$. 124. $\frac{\sin(\alpha+\beta)\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sqrt{2}\sin^2\alpha\cos\beta}$.

125. $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{k}{2\sin\frac{\pi}{n}}\right)$. 126. $\frac{2}{3}R^3\sin 2\beta\cos\beta\sin\alpha$. 130. $\frac{6\pi R^2\sin^2 2\alpha}{(1+2\operatorname{ctg}\alpha)^3}$.

131. $\frac{2\sqrt{3}\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}{9\pi\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{\varphi}{2}}$. 132. $\operatorname{arctg}\sqrt{9+3\sqrt{10}}$.

133. 27. 134. $abc\sin\alpha\sin\beta$. 135. $\frac{4}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 136. $\frac{-l^3\cos\alpha\sin 2\alpha}{2\sin^2\alpha\cos 3\alpha}$.

137. $\frac{(x+l)^3(2x-l)}{(x-l)^3(2x+l)}$, где $x=\sin\frac{\alpha}{2}$, $l=\sqrt{-\cos\alpha}$. 138. $\frac{S_1\sqrt{27}}{2\pi}\times$

$\times\left(1+\sqrt{\frac{S_2}{S_1}}\right)$. 139. $\arcsin(3-\sqrt{8})$. 140. $\frac{\pi}{4}$. Обозначить через $x$ величину плоского угла при вершине $r$, $R$, $a$, $H$ — соответственно радиусы вписанного и описанного шаров, сторону основания и высоту пирамиды. Так как центры шаров совпадают, то $H=R+r$. Далее использовать соотношение $H=\frac{a}{2}\sqrt{\operatorname{ctg}^2\frac{x}{2}-1}$ и свойства прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза — диаметр описанного шара, а катет — боковое ребро пирамиды. 141. $\frac{\pi}{3}$.

142. $\frac{2\sqrt{11}a^2}{49}$. 143. $\frac{4\pi}{3a}p(p-a)(p-b)(p-c)$, где $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

144. $72\pi$. 145. $R=\frac{a^2+b^2}{2\sqrt{\sqrt{a^4+b^4+6a^2b^2}-(a^2+b^2)}}$. 146. $\frac{Pq\sin\alpha}{a}$.

147. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$. 150. $\sqrt{3}$. 151. $\pi R^2\sqrt{5}$. 152. $\frac{7}{27}V$. 153. $\frac{3}{4}\sqrt{n^2-1}\,a^3$.

154. $\frac{m^3}{2}(4\sqrt{3}+3\sqrt{2})$; $\frac{m^3\sqrt[4]{3}}{6}$. 155. $\frac{1}{2}(S_1+S_2)h$. 156. 12 см$^3$.

157. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. 158. $\frac{1}{2}a^3\sin 2\alpha\operatorname{tg}\beta$. 159. $\operatorname{arctg}\frac{2m}{m+n}$. 167. $x+4y+$

$+2z=2$. 168. 3. 169. $\frac{13}{2\sqrt{3}}$. 170. $2x+y+3z=0$.
171. $\arccos\sqrt{\frac{3}{17}}$. 172. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$.

## Глава XVIII

### В-1

1. $-\frac{1}{\sqrt{b+2}}$. 2. $\frac{h^2\sqrt{8S-h^2\sin\alpha}}{12\sqrt{2S}\sin\frac{\alpha}{2}}$; $h=\sqrt{\frac{6S}{\sin\alpha}}$. 3. $\{3;$
$\log_8 1{,}5\}$. 4. $\left\{-\frac{5\pi}{12}+n\pi\right\}$. 5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

### В-2

1. $A=\begin{cases}1-x & \text{при } x\leqslant -4,\\ x+9 & \text{при } -4<x\leqslant 3,\\ 3x+3 & \text{при } x>3.\end{cases}$ 2. $\arcsin 0{,}6$. 3. $[2;3[\cup]4;+\infty[$.
4. $\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$. 5. $\sqrt{2}\cdot 3^{-\lambda}$.

### В-3

1. $\frac{1}{2}$. 2. $\frac{1}{2}aS\cos\frac{\varphi}{2}$. 3. $]4;\ 3+\sqrt[3]{10}[$. 4. $\frac{83}{45}$. 5. 0.

### В-4

2. $2\arcsin\left(\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}a^{-\frac{1}{3}}}\right)$. 3. $\{\lg a\pm\sqrt{(\lg a)^2-b^2}\}$,
где $\lg a>b>0$. 4. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\right\}$. 5. $f_{\min}=0$; $f_{\max}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$.

### В-5

1. 0. 2. $\frac{\sin\varphi\,(2\sin(\beta+\varphi)\sin\varphi)}{6\sin^2(\beta+\varphi)}$, где $\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}\right)$.
3. $\{(1{,}5;\ 0{,}5)\}$. 4. $\left\{\frac{7\pi}{36}-n\pi;\ \frac{\pi}{4}-n\pi\right\}$. 5. 4.

### В-6

1. $\sqrt{b}-\sqrt{a}$. 2. $\frac{\pi a^2\sqrt{2}}{36}$. 3. $\left]\frac{3-\sqrt{5}}{2};\ +\infty\right[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{6}+2n\pi;\right.$
$\left.\frac{5\pi}{18}+\frac{2n\pi}{3}\right\}$. 5. $a\sqrt{2}$.

### В-7

1. 1. 2. $\arccos\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 3. $\left]\frac{1}{3};\ 1\right[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2};\right.$
$\left.\frac{\pi}{10}+\frac{n\pi}{5}\right\}$. 5. $y\approx 0{,}193$; $x=0{,}5$.

B-8

1. 1. 2. $\frac{\pi a^3 \sqrt{\cos\alpha}}{12\sin^3\frac{\alpha}{2}}$. 3. $\{4;\ 1\}$. 4. $\left\{\frac{n\pi}{6}\right\}$. 5. $x=0$.

B-9

1. 1. 2. $\frac{2a^2\sin\beta\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}$. 3. $\varnothing$. 4. $\left\{\pm\frac{1}{2}\times\right.$
$\left.\times\arccos\frac{1\pm\sqrt{5}}{4}+n\pi\right\}$. 5. 0.

B-10

1. $32x$. 2. $2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3\pm\sqrt{2}}{7}}$. 3. $\{(\pm 1;\ \pm 2)\}$. 5. $-\left(\frac{x^{-2}}{3}+\frac{71}{24}\right)$.

B-11

1. $\frac{2a}{(a^2+b^2)\sqrt[3]{a-b}}$. 2. $\frac{\pi b^2}{18\cos\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi+\right.$
$\left.+(-1)^n\arcsin\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$. 5. $32\pi$.

B-12

1. $-1$. 2. $2\sqrt{\frac{S}{\pi}}\operatorname{tg}\alpha\sin^2\frac{\alpha}{2}$. 3. $\{100\}$. 4. $\left\{\frac{1}{5};\ \sqrt[6]{5}\right\}$. 5. 6.

B-13

1. $\begin{cases}2\sqrt{a-1}, & \text{если } a\geqslant 2,\\ 2, & \text{если } 1<a<2.\end{cases}$ 2. $\frac{c^3}{12}\sin\alpha\sqrt{\cos\alpha}$; $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$.
3. $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi;\ \frac{\pi}{12}(-1)^n+\frac{n\pi}{2}\right\}$. 4. $\{9\}$. 5. 1.

B-14

1. $\begin{cases}2\sqrt{a^2-2}, & \text{если } |a|\geqslant 2,\\ 2\sqrt{2}, & \text{если } \sqrt{2}<|a|<2.\end{cases}$ 2. $\sqrt[3]{3}\operatorname{tg}\alpha\,(S\cos\alpha)^{1,5}$,
$\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 3. $\left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2}\right\}$. 4. $\{-2;\ -1\}$. 5. 4,5.

B-15

1. $\sqrt{\frac{a}{a+4b}}$. 2. $\frac{2\pi a^3\sec^2\frac{\pi q}{p+q}}{3\cos\alpha\sin 2\alpha}$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$. 3. $\{(5;\ 5)\}$.
4. $\left\{\frac{n\pi}{14},\ n\neq 14m\right\}$. 5. $\frac{\pi}{4}$.

B-16

1. 1. 2. $\frac{2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}{\pi(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\beta)}$. 3. $\left]\frac{19-\sqrt{37}}{6};\ +\infty\right[$. 4. $\left\{\frac{5\pi}{9}+2\pi n;\right.$
$\left.-\frac{\pi}{9}+2\pi n\right\}$. 5. 1.

**В-17**

1. $-\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}$. 2. $24\pi r^2$; $\frac{64}{3}\pi r^3$. 3. $\left\{\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{4}\right)\right\}$. 4. $\left\{\frac{1}{9}\right\}$. 5. $20\frac{5}{6}$.

**В-18**

1. $\frac{x^2+x+2}{(x^2+1)\sqrt{x}}$. 2. $\frac{a^3}{12}\operatorname{tg}\beta\sin 2\alpha\sin^2\alpha$. 3. $\{5; \sqrt[5]{5}\}$. 4. $\left\{2n\pi; \frac{\pi}{4}+\frac{n\pi}{2}\right\}$. 5. $12-5\ln 5$.

**В-19**

1. $\frac{1}{2}x^{\frac{2}{3}}(x^2-\sqrt{x^4-1})$. 2. $\frac{r^2\sin\alpha\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$. 3. $\left\{-\frac{\pi}{6}+n\pi; \frac{\pi}{9}+\frac{2}{3}n\pi\right\}$. 4. $\left\{6; \frac{1}{6}\right\}$. 5. $\frac{1}{4}$.

**В-20**

1. 1 при $x-\frac{1}{x}\geqslant 0$; $\frac{x^2+1}{1-x^2}$ при $x-\frac{1}{x}<0$. 2. $V\sin^2\frac{\alpha}{4}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi+\frac{\pi}{3}(-1)^{n+1}\right\}$. 4. $\{a\}$. 5. $\sqrt{33}$; $\sqrt{105}$.

**В-21**

1. $\sqrt{x+1}$. 2. $\arcsin\frac{a}{2\sqrt{b^2-a^2}}$. 3. $]-4; -3[\cup]8; +\infty[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{12}+\frac{n\pi}{3}\right\}$. 5. $-6$.

**В-22**

1. $\frac{1}{2b}$. 2. $\frac{\pi H^3}{6}(1+2\operatorname{ctg}^2\alpha)^3$. 3. $\left\{\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4}+n\pi; n\pi\right\}$. 4. $\{(10; \sqrt[4]{10}), (\sqrt[4]{10}; 10)\}$. 5. $-\frac{1}{4}\ln 48$.

**В-23**

1. $\sqrt[4]{ab}$. 2. $4\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{9}+n\pi; \operatorname{arctg}\frac{9}{4}+n\pi\right\}$. 4. $\left\{\pm\arccos\frac{1}{4}+2n\pi; \pm\left(\pi-\arccos\frac{3}{4}\right)+2n\pi\right\}$. 5. $-8$.

**В-24**

1. 2 при $a>0$; $-2$ при $a<0$. 2. $\frac{R\cos^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$. 3. $]-1; \frac{1-\sqrt{5}}{2}[\cup]\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 2[$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{4}+n\pi; -\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+n\pi\right\}$. 5. $\frac{1}{3}$.

**В-25**

1. $\sqrt[3]{\frac{2}{1+a}}$. 2. $\frac{1}{3}a^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$.

3. $\left\{-1 \pm \sqrt{1+\frac{1}{2}k}\right\}$, где $k \in N$. 4. $\{(7; 5)\}$. 5. $\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

**В-26**

1. $x^3+y^3$. 2. $\frac{3l^2 \sin^2 2\alpha}{4\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$; $\alpha=\frac{\pi}{4}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3}\right\}$. 4. $\{(10^{1+\sqrt{2,5}};\ 10^{\sqrt{2,5}-1}),\ (10^{1-\sqrt{2,5}};\ 10^{-1-\sqrt{2,5}})\}$.

**В-27**

1. $ab$. 2. $\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{8}{3}}-1\right)$. 3. $\left\{-\frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{2};\ \frac{\pi}{4}+n\pi;-\frac{\pi}{4}+\right.$ $\left.+n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}\right\}$. 4. $\{1; 3a^3\}$. 5. $65\frac{1}{3}$.

**В-28**

1. $\sqrt[4]{b}$. 2. $\frac{2a^3b^3}{3(b^3-a^3)\sqrt{2a^3-b^3}}$. 3. $\left]\frac{2}{3}; 2\right[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{36}(-1)^n+\right.$ $\left.+\frac{n\pi}{6}\right\}$. 5. $\sqrt{7}$; $\sqrt{13}$.

**В-29**

1. $-6$ при $x \geqslant 6$; $6-2x$ при $0 \leqslant x < 6$; $6$ при $x < 0$. 2. $32\sqrt{\sqrt{27}-5}$. 3. $\{n\pi\}$. 4. $\{\pm 1\}$. 5. $\frac{1}{2\sqrt{5}}$.

**В-30**

1. $a^3+a-4$ при $a \geqslant \sqrt{2}$; $a-a^3$ при $0 < a < \sqrt{2}$. 2. $\frac{16a^3b^3}{3(a^3-b^3)\sqrt{2b^3-a^3}}$. 3. $\{2\}$. 4. $\sqrt{2\operatorname{tg}\alpha}\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right|$. 5. $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$.

**В-31**

1. $1+\sqrt{x}$. 2. $\frac{3a^3}{4\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{2}\right)}$. 3. $\{-1; -100\}$. 5. 3.

**В-32**

1. $(a^3+a^{\frac{3}{4}})$. 2. $\frac{8}{\cos\alpha}\left(\frac{3}{13}V\operatorname{ctg}\alpha\right)^{\frac{2}{3}}$. 3. $\left\{-\frac{\pi}{4}+\pi n\right\}$. 4. $a^{\frac{2}{3}}$. 5. $-2$.

**В-33**

1. $-1$. 2. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 3. $\{\log_2 0{,}6;\ \log_2 0{,}4\}$. 4. $2\sqrt{3}\times$ $\times\sin\frac{\pi}{9}\sin\frac{2\pi}{9}$. 5. $4x-y+z=4$.

**B-34**

1. $\frac{\sqrt{b}}{2}\sqrt[3]{a^3-8b^3}$. 2. $\frac{9}{32}\left(\frac{R\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)}\right)^3$. 3. $\{5;\ 25\}$. 5. $\arccos\frac{16}{21}$.

**B-35**

1. $-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$. 2. $\frac{4\pi a^2}{\sin^2\beta}\sin\alpha\sin(\alpha+\beta)\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi\right\}$. 5. $\arccos\frac{4}{\sqrt{42}}$.

**B-36**

1. $\frac{2(2x+a)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{(2x-a)^3}}$. 2. $\frac{R}{2\sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{4}}}$. 3. $\{2\}$. 4. $\left\{-\frac{21}{9};\ 4;\ 3\right\}$. 5. $f_{\max}=4$; $f_{\min}=-24$.

**B-37**

1. $\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{n\pi}{3};\ \frac{\pi}{8}+\frac{n\pi}{4}\right\}$. 2. $\frac{2\pi^3r^3}{3(\pi^2-1)}$. 3. $\left]0;\ \frac{1}{9}\right[\cup\left]\sqrt[5]{9},\ +\infty\right[$. 4. $\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{5}-3);\ \frac{1}{2}(9-\sqrt{29})\right\}$. 5. $\sqrt{29}$; 3.

**B-38**

1. $\left\{\frac{3\pi}{8}+n\pi;\ \frac{1}{2}(\operatorname{arctg}5+\pi(2n+1))\right\}$. 2. $\frac{\pi r^3}{3\sqrt{2}}$. 3. $]4^{-4},\ 4[$. 4. $n=1023$. 5. $y_{\max}=\frac{\sqrt{2}}{4}$; $y_{\min}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

**B-39**

1. $\{-1000\}$. 2. $\frac{\pi^6}{12}$. 3. $\left\{\left(\frac{\sqrt{1+8n}-1}{2}\right)^2,\ n\in N;\ \left(\frac{1+\sqrt{8k-3}}{2}\right)^2,\ k\in N,\ k\neq 0\right\}$. 4. $]1;\ \sqrt{3}[$. 5. $\arccos\frac{63}{\sqrt{6441}}$.

**B-40**

1. $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. 2. $\frac{R(\sqrt{3n+4m}-\sqrt{n})}{2(m+n)}$. 3. $\{n\pi\}$. 4. $]0;\ 0{,}04[$. 5. $7{,}5-4\ln 4$.

**B-41**

1. $\left\{\frac{\pi}{6}(-1)^n+n\pi\right\}$. 2. $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 3. $\left\{\frac{\pi}{8}(1+2n)\right\}$. 4. $]-\infty;\ -3[\cup]-1;\ 1[\cup]3;\ +\infty[$. 5. $y_{\min}=0$; $y_{\max}=17$.

**B-42**

1. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\right\}$. 2. $\arccos\frac{1}{3}$. 3. $]0;\ +\infty[$. 4. $\left\{\pm\frac{2\pi}{3}+2n\pi;\ \pm\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)+2n\pi\right\}$. 5. $x-2y-3z=4$.

**В-43**

1. $\left\{3\frac{1}{728};\ 3\frac{1}{63}\right\}$. 2. $\frac{2\pi\sin^3\alpha}{\sqrt{27}(3+\cos^2\alpha)}$. 3. $\left[\frac{1}{5};\ 5\right[$.
4. $\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\left((2k+1)+\sqrt{(2k+1)^2-16}\right)\right\}$, где $k\in Z$, $k\neq 0, \pm 1, \pm 2$; $\left\{\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\left((2n+1-\sqrt{(2n+1)^2-16}\right)\right\}$, где $n\in Z$, $n\neq 0, \pm 1, -2, -3$.
5. $y_{\min}=\frac{1}{4}-\ln 2$.

**В-44**

1. $\left\{\frac{\pi}{4}+2n\pi\right\}$. 2. $\operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos\frac{\beta}{2}}\right)$. 3. $\left[-\infty;\ \frac{\sqrt{13}-1}{6}\right[$.
4. $\left\{\operatorname{arctg}\frac{1\pm\sqrt{6\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}+n\pi\right\}$. 5. $\sqrt{19}$.

**В-45**

1. $]-\infty;\ 2[\cup]6;\ +\infty[$. 2. $2\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{3}}{k}$. 3. $]0;1[\cup]1;\ 2[$.
4. $\left\{\pm\frac{\pi}{12}\pm\frac{n\pi}{4}\right\}$. 5. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$.

**В-46**

1. $\{10;\ -20{,}5\}$. 2. $\frac{\arccos(-\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha)}{\arccos(\operatorname{tg}\beta\operatorname{ctg}\alpha)}$. 3. $\left]\frac{4}{5};\ 1\right[\cup]40;\ +\infty[$.
4. $\left\{-\frac{\pi}{4}+n\pi\pm\arcsin\frac{1}{2\sqrt{2}}\right\}$. 5. $y_{\max}=1$; $y_{\min}=\frac{1}{4}$.

**В-47**

1. $\{\pm i\}$. 2. $2\operatorname{tg}\beta\left(a\cos\frac{\alpha}{2}\right)^3$. 3. $]-3;\ 2-\sqrt{19}[\cup]2+\sqrt{19};\ +\infty[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{4}+n\pi;\ \frac{1}{2}\left(n\pi+(-1)^n\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right\}$. 5. $(3;\ 8)$.

**В-48**

1. $\{1;\ \pm 2\}$. 2. $\arcsin(\cos\alpha\sin\beta)$; $\arcsin(\sin\alpha\sin\beta)$. 3. $]0;\ 1[\cup\cup[4;\ +\infty[$. 4. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+n\pi\right\}$. 5. $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

**В-49**

1. $]2-\sqrt{2};\ 2+\sqrt{2}[$. 2. $\sqrt{\frac{a^2b}{2}}\sqrt{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$.
3. $\{n\pi\}$. 4. $\left\{\pm\frac{\pi}{3}+2n\pi\right\}$. 5. $\frac{\pi}{2}+1$.

**В-50**

1. $\left\{\frac{\pi}{4}(-1)^n+n\pi\right\}$. 2. $\frac{\pi a^3}{12}\sin^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$; $\arccos\frac{1}{6}$. 3. $]1;\ 3[\cup\cup]3;\ +\infty[$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{4}+n\pi+(-1)^n\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-1\right);\ k\pi-\operatorname{arctg}1{,}5\right\}$.
5. 4,5.

1. $4-2\sqrt{a}$ при $0<a<16$; $-4$ при $a\geqslant 16$.
2. $\frac{(a+b)^2}{24}\sqrt{a(a-2b)}\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}$. 3. $\arcsin\frac{1}{3}+\pi n$. 4. $\left(64;\ \frac{1}{4}\right)$.
5. $\frac{4}{3}$.



1. $-\sqrt{x}$ при $0<x<\frac{1}{3}$; $\sqrt{x}$ при $x\geqslant\frac{1}{3}$. 2. $\frac{\pi}{6a}(a+b)(a^2+$
$+ab+b^2)\sqrt{\frac{a(a-b)}{2}}$. 3. $-\frac{\pi}{4}+\pi n$. 4. $\frac{5}{2}<x<3$. 5. $\frac{2}{3}$.

## СПИСОК РЕКОМЕНДОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


1. Горделадзе Ш. Г., Кухарчук М. М., Яремчук Ф. П. Збірник конкурсних задач з математики: Посібник для вступників до вузів. Київ Вища школа. Головне вид-во, 1976. 322 с.
2. Болтянский В. Г., Сидоров Ю. В., Шабунин М. И. Лекции и задачи по элементарной математике. М.: Наука, 1974. 576 с.
3. Лозанский Э. Д. Математика: Поступающим в вузы. Киев Вища школа. Головное изд-во, 1976. 232 с.
4. Зайцев В. В., Рыжков В. В., Сканави М. И. Элементарная математика: Повторительный курс. М.: Наука, 1974. 630 с.
5. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Пособие по математике для поступающих в вузы. М.: Наука, 1972, 580 с.
6. Павлович В. С. Анализ ошибок абитуриентов по математике. Киев: Вища школа. Головное изд-во, 1975. 232 с.
7. Ковалцова Л. В., Малышев И. Г. Сборник задач по математике. Киев. Вища школа. Головное изд-во, 1980. 288 с.